Fonction logarithme népérien, cours de terminale STG

1 Construction de la fonction logarithme népérien

Historiquement la fonction logarithme népérien a été introduite vers les XV^e XVI^e siècles afin de simplifier les calculs astronomiques. En particulier la problématique était de rechercher une fonction transformant les multiplications en additions (source : document d'accompagnement des programmes de terminale STG).

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction notée ln définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée est

$$\ln'(x) = ...$$

et qui vérifie

$$\ln(1) = ...$$

Cette fonction est appelée *fonction logarithme népérien*.

Preuve :
Admis

2 Propriétés algébriques

Propriété :

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Preuve :
Admise.

Exemples :

Cette propriété permet de transformer les multiplications en additions :

- $\ln(6) = ...$
- $\ln(9) = ...$
- $\ln(32) = ...$
- $\ln(100) = ...$

Conséquences :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,
- $\ln(\frac{1}{b}) = ...$
- $\ln(\frac{a}{b}) = ...$
- pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = ...$
- $\ln(\sqrt{a}) = ...$

Preuve :
- D'une part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) = ...$
  D'autre part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) = ...$
  Donc $\ln(b) + \ln(\frac{1}{b}) = ...$ d'où $\ln(\frac{1}{b}) = ...$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = ...$
- Découle directement du fait que $\ln(a^n) = \underbrace{......................................}_{n \text{ fois}}.$
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = ...$

Exemples :

On peut ainsi manipuler de très grands nombres ou de très petits nombres :

- $\ln(10\,000) = ...$
- $\ln(1024) = ...$
- $\ln(1/10^8) = ...$

3 Propriétés analytiques

3.1 Étude de la fonction

Propriété :

ln est .... sur $]0; +\infty[$.

Preuve :
Découle du fait que pour tout x réel strictement positif, $\ln'(x) = ...$

Propriété et définition :

Il existe un unique réel dont le logarithme népérien vaut 1, on appelle e cet unique réel tel que .... Ce nombre e est appelé ....

Preuve :
Découle de l'hypothèse que ln est dérivable sur .... et strictement croissante sur ....

3.2 Tableau de variation

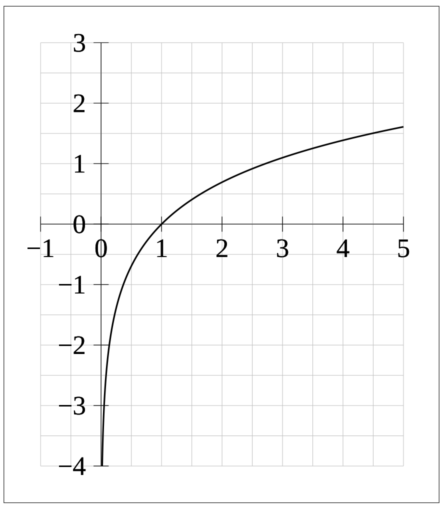
x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|$	....	
$\ln(x)$	$\|$	....	

3.3 Tableau de signe

x	0		...		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|$	...	...	...	

3.4 Représentation graphique

On parle de .... pour décrire une telle évolution.



4 Résolution d'équations et d'inéquations avec le logarithme népérien

Propriété :

- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si ....
- $\ln(a) \geq \ln(b)$ si et seulement si .....

Preuve :
Découle de l'hypothèse que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et strictement croissante.

Exemples :

- $\ln(x-1) = 0$

  Première étape : *Détermination de l'ensemble de définition.*

  On a $x - 1 >$ .... si et seulement si $x >$ .... donc l'ensemble de définition est ....

  Deuxième étape : *Résolution de l'équation.*

  On a $\ln(x-1) = 0$ qui s'écrit $\ln(x-1) = \ln(.....)$ ce qui équivaut à $x - 1 =$ ..... donc $x =$ ...... Comme ..... est dans l'ensemble de définition ...., ... est donc l'unique solution de l'équation.

- $\ln(x-1) = 2$

  Première étape : L'ensemble de définition est le même .... que dans l'exemple précédent.

  Deuxième étape : $\ln(x-1) = 2$ s'écrit $\ln(x-1) = 2\ln(.....)$ ce qui équivaut à $\ln(x-1) = \ln(.....)$ donc $x - 1 =$ .... et $x =$ .... (on ne peut pas simplifier davantage sans perdre la valeur exacte). Comme .... appartient à l'ensemble de définition ...., ... est l'unique solution.

- $\ln(2x-1) < 5$

  Première étape : *Détermination de l'ensemble de définition.*

  On a $2x - 1 >$ ..... qui donne $x >$ ..... donc l'ensemble de définition est ....

  Deuxième étape : *Résolution de l'inéquation.*

  $\ln(2x-1) < 5$ s'écrit aussi $\ln(2x-1) < 5\ln(.....)$ c'est à dire $\ln(2x-1) < \ln(.......)$ ce qui équivaut à $2x - 1 <$ .... donc à $x <$ .... (on ne peut à nouveau pas simplifier plus). Comme .... est dans l'ensemble de définition ...., ... est l'unique solution de l'inéquation.