# Exposants réels, cours de Terminale STG

F.Gaudon

28 mai 2009

## Table des matières

# 1 Construction de la fonction logarithme népérien

Historiquement la fonction logarithme népérien a été introduite aux XV^e et XVI^e siècles par Neper afin de simplifier les calculs astronomiques. En particulier la problématique était de rechercher une fonction transformant les multiplications en additions (source : document d'accompagnement des programmes de terminale STG).

On cherche une fonction donc une fonction $f$ qui vérifie $f(ax) = f(a) + f(x)$ pour tous les réels strictement positifs $a$ et $x$.

**Propriété :**

> Soit $f$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : pour tous réels $a$ et $x$ strictement positifs, $f(ax) = f(a) + f(x)$, alors $f'(x) = \frac{k}{x}$ où $k$ est un nombre réel.

**Preuve :**

On suppose dans un premier temps qu'une telle fonction $f$ existe. Alors $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$. D'autre part, soit $a > 0$, pour tous les réels $x > 0$, on a $f(ax) = f(a) + f(x)$ d'où en dérivant $af'(ax) = f'(x)$ et pour $x = 1$ on obtient $af'(a) = f'(1)$ donc $f'(a) = \frac{f'(1)}{a}$. D'où pour tous les réels $x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$. Choisissons $f'(1) = k$ où $k$ est un réel quelconque puisqu'aucune contrainte ne semble fixer $f'(1)$. On a donc $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout réel $x > 0$.

**Propriété et définition :**

> Il existe une unique fonction notée ln définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ dont lé a dérivée est $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $ln(1) = 0$. Cette fonction est appelée *fonction logarithme népérien*.

# 2 Propriétés algébriques

**Propriété :**

> Pour tous les réels $a$ et $b$ strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

**Preuve :**

Soit $a > 0$. On pose pour tout réel $x > 0$, $h(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$. Il s'agit de montrer que $h$ est nulle $h$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $h'(x) = a\frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$. $h'$ est donc la fonction nulle d'où ses primitives sont constantes. $h$ est donc constante. Comme $h(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0$, $h$ est donc la fonction nulle aussi. D'où pour tout $x > 0$ et tout $a > 0$ on a $\ln(ax) = \ln(a) + ln(x)$.

**Propriétés :**

> Pour tous les réels $a$ et $b$ strictement positifs,
> - $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$ ;
> - $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ ;
> - pour tout entier relatif $n$, $\ln(a^n) = n \ln a$ ;
> - $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ ;

**Preuve :**

- D'une part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln(1) = 0$.
  D'autre part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln(b) + \ln(\frac{1}{b})$
  Donc $\ln(b) + \ln(\frac{1}{b}) = 0$ d'où le résultat.
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ d'après ce qui précède.
- Découle directement du fait que $\ln(a^n) = \underbrace{\ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a)}_{n \text{ fois}}$.
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$. D'où le résultat.

**Exemples :**

- $\ln(32) = \ln(2^5) = 5\ln(2)$ ;
- $\ln(1/10^8) = -8\ln(10)$.

# 3 Propriétés analytiques

## 3.1 Étude de la fonction

**Propriété :**

ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

**Preuve :**
Découle du fait que pour tout $x$ réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

**Propriété et définition :**

Il existe un unique réel dont le logarithme népérien vaut 1, on appelle $e$ cet unique réel tel que $\ln(e) = 1$.

**Preuve :**
Découle de l'hypothèse (forte) que ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement croissante.

## 3.2 Tableau de variation

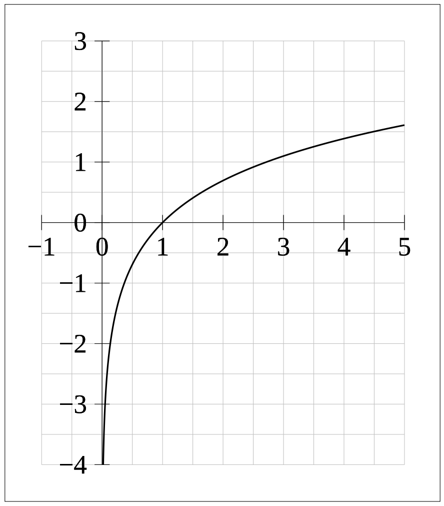
| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ln'(x)$ | $\|$ | $+$ | |
| $\ln(x)$ | $\|$ | $\nearrow$ | |

## 3.3 Tableau de signe

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | $\|$ | - | $0$ | $+$ | |

### 3.4 Représentation graphique

On parle de *croissance logarithmique* pour décrire une telle évolution.




## 4 Résolution d'équations et d'inéquations avec le logarithme népérien

**Propriété :**

- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a = b$.
- $\ln(a) \geq \ln(b)$ si et seulement si $a \geq b$.

**Preuve :**

Découle de l'hypothèse (forte) que ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement croissante.

**Exemples :**

- $\ln(x - 1) = 0$
  Première étape : détermination de l'ensemble de définition.
  On a $x - 1 > 0$ si et seulement si $x > 1$ donc l'ensemble de définition est $]1; +\infty[$. Deuxième étape : résolution de l'équation.
  On a $\ln(x - 1) = 0$ qui s'écrit $\ln(x - 1) = \ln(1)$ ce qui équivaut à $x - 1 = 1$ donc $x = 2$. Comme 2 est dans l'ensemble de définition, c'est donc l'unique solution de l'équation.
- $\ln(x - 1) = 2$
  Première étape : on a affaire au même ensemble de définition $]1; +\infty[$ que dans l'exemple précédent.
  Deuxième étape : $\ln(x-1) = 2$ s'écrit $\ln(x-1) = \ln(e^2)$ ce qui équivaut à $x-1 = e^2$ donc $x = 1+e^2$.
  Comme $1 + e^2$ appartient à l'ensemble de définition, c'est l'unique solution.
- $\ln(2x - 1) < 5$
  Première étape : détermination de l'ensemble de définition.
  On a $2x - 1 > 0$ qui donne $x > \frac{1}{2}$ donc l'ensemble de définition est $]\frac{1}{2}; +\infty[$.
  Deuxième étape : résolution de l'inéquation.
  $\ln(2x - 1) < 5$ s'écrit aussi $\ln(2x - 1) < 5\ln(e)$ c'est à dire $\ln(2x - 1) < \ln(e^5)$ ce qui équivaut à $2x - 1 < e^5$ donc à $x < \frac{e^5+1}{2}$. Comme $\frac{e^5+1}{2}$ est dans l'ensemble de définition, c'est l'unique solution de l'inéquation.