Fonctions composées

1 Notion de fonctions composées

Définition :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J tel que pour tout réel x de l'intervalle I, $u(x)$ appartient à l'intervalle J. La fonction f *composée de u suivie de v* est définie sur l'intervalle I par

....

c'est à dire

....

Exemple :

Soient u et v les fonctions définies pour tout réel x par $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = x^4$.

La fonction f composée de u suivie de v est définie par ....

La fonction g composée de v suivie de u est définie par ....

2 Dérivation des fonctions composées

2.1 Cas général

Propriété :

Si u est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x \in I$ et si v est une fonction dérivable en $u(x)$, alors la fonction définie par $f(x) = v(u(x))$ est dérivable en x et

....

. En particulier :

- $x \mapsto (ax+b)^n$ a pour dérivée ....
- $x \mapsto \sqrt{ax+b}$ a pour dérivée ....
- $x \mapsto \ln(ax+b)$ a pour dérivée ....

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-5x)^2$. On a $u(x) =$ .... donc $u'(x) =$ .... et $f'(x) =$ ....
- Soit f la fonction définie sur $[\frac{5}{4}; +\infty[$ par $h(x) = \ln 4x - 5$, on a pour $x \in]\frac{5}{4}; +\infty[$, $u(x) =$ .... et $u'(x) =$ .... donc :
  $h'(x) =$ ....

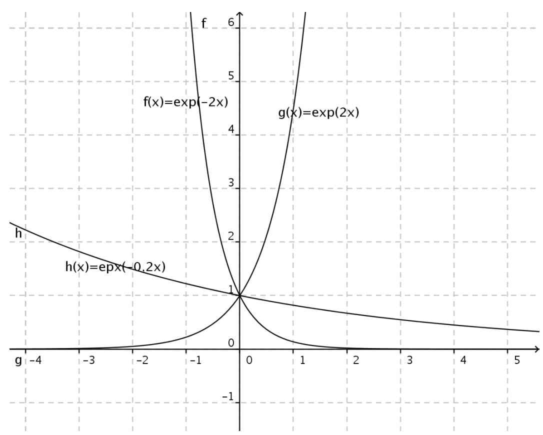
2.2 Application aux fonctions exponentielles

Propriété :

La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ où a et b sont deux réels fixés est définie et dérivable sur .... et $f'(x) =$ .... pour tout x réel.

Conséquence sur les variations :

- Si $a < 0$, alors la fonction f définie ci-dessus est .... sur $\mathbb{R}$;
- si $a > 0$, alors la fonction f est .... sur $\mathbb{R}$.



Propriété :

La fonction $f : x \mapsto a^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) =$ .... ;

Conséquence :

- Si ...., alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si ...., alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.