Fonctions composées, cours de Terminale STG

F.Gaudon

21 mars 2010

Table des matières

1 Notion de fonctions composées

Définition :

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle J tel que pour tout réel x de l'intervalle I, $u(x)$ appartient à l'intervalle J. La fonction f *composée de u suivie de v* est définie sur l'intervalle I par $f(x) = v(u(x))$ c'est à dire :

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{v} v(u(x))$$

Exemple :

Soient u et v les fonctions définies pour tout réel x par $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = x^4$. On a :

$$x \xrightarrow{u} 3x - 2 \xrightarrow{v} (3x - 2)^4$$

La fonction f composée de u suivie de v est définie par $f(x) = (3x - 2)^4$.
La fonction g composée de v suivie de f est définie par $g(x) = 3x^4 - 2$.

2 Dérivation des fonctions composées

2.1 Cas général

Propriété :

Si u est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x \in I$ et si v est une fonction dérivable en $u(x)$, alors la fonction définie par $f(x) = v(u(x))$ est dérivable en x et

$$f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

. En particulier :

- $x \mapsto (ax + b)^n$ a pour dérivée $x \mapsto a \times n \times (ax + b)^{n-1}$
- $x \mapsto \sqrt{ax + b}$ a pour dérivée $x \mapsto a\frac{1}{2\sqrt{ax+b}}$
- $x \mapsto \ln(ax + b)$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{a}{ax+b}$

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-5x)^2$. On a $f'(x) = -5\times2\times(2-5x)^1 = -10(2-5x)$.
- Soit f la fonction définie sur $[\frac{5}{4}; +\infty[$ par $h(x) = \ln 4x - 5$, on a pour $x \in]\frac{5}{4}; +\infty[$
  $h'(x) = 4 \times \frac{1}{4x-5} = \frac{4}{4x-5}$.

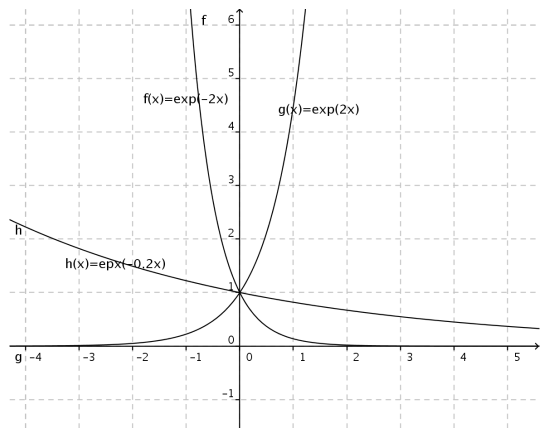
2.2 Application aux fonctions exponentielles

Propriété :

La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ où a et b sont deux réels fixés est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = ae^{ax+b}$ pour tout x réel.

Conséquence :

- Si $a < 0$, alors la fonction f définie ci-dessus est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $a > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Propriété :

La fonction $f : x \mapsto a^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel,

$$f'(x) = (\ln a)a^x$$

Conséquence :

- Si $0 < a < 1$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $a > 1$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.