Exposants réels, cours de terminale STG

1 Généralités

Propriété et définition :

Soients a et b deux nombres réels avec a strictement positif. On note .... le nombre réel strictement positif antécédent du nombre $b\ln(a)$ par la fonction ln c'est à dire le nombre réel strictement positif qui vérifie ....

Preuve :
Découle immédiatement de la dérivabilité (continuité) et de la stricte croissance de la fonction ln.

Propriété :

Soient a, a', b et b' des nombres réels avec a et a' strictement positifs.

- $a^b a^{b'} = ...$
- $\frac{a^b}{a^{b'}} = ...$
- $\frac{1}{a^b} = ...$
- $\frac{a^b}{a'^b} = ...$
- $a^b a'^b = ...$
- $(a^b)^{b'} = ...$

Exemples :

- $3^4 \times 3^6 =$ .... ;
- $\frac{3^7}{3^5} =$ .... ;
- $3^{-2} =$ .... ;
- $3^4 \times 5^4 =$ .... ;
- $(3^4)^5 =$ ....

Exemple :

Un capital de 10 000 euros est placé durant deux ans et sept à mois à intérêts composés , au taux annuel de 3,5%.

...

La valeur acquise par le capital au bout de 2 ans et sept mois se monte donc à ....

2 Applications

2.1 Équations $x^n = a$

Propriété :

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$, le nombre .... appelé racine n-ième du nombre a.

Preuve :
On a $x^n = a$ si et seulement .... c'est à dire .... donc .... d'où .... par définition de $a^{\frac{1}{n}}$.

Exemples :

- $x^3 = 64$ si et seulement si .... c'est à dire ....
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison q, de premier terme $v_0 = 3$ et telle que $v_{10} = 12$. On a .... donc .... c'est à dire .... donc .... donc $q \approx 1,15$.

Définition :

- $C_n = C_0 \times (1+t)^n$ est appelé .... par le capital C_0 au pendant n années au taux de t % à intérêts composés.
- C_0 est appelé .... de C_n. On a

$$C_0 = ...$$

- Deux taux correspondants à des périodes de calcul des intérêts différentes sont dits .... lorsque, à intérêts composés, ils donnent ....

Exemple :
C_0 est placé à 0,26 % par mois avec intérêts composés sur 12 mois.
On a $C_{12} = ...$
donc le taux annuel équivalent au taux mensuel de 0,26 % est ....
En outre, soit t le taux trimestriel (on rappelle qu'il y a quatre trimestres dans une année),
on a $(1+t)^4$.............. donc $1 + t \approx$ .... soit un taux trimestriel équivalent de ....

2.2 Application au calcul de taux moyens

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives de taux t_1, t_2, $\ldots$, t_n, on appelle alors .... le nombre

....

et .... le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre

....

C'est le taux d'évolution, qui, s'il avait été identique lors de chacune des n évolutions, aurait donné la même valeur finale que les différents taux t_1, t_2, etc.

Exemples :

- Un prix initial de 100 € subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %.

  ...

  En outre, ... soit .... de baisse annuelle en moyenne.
- Un produit a vu son prix multiplié par 1,6 en 4 ans. Soit t le taux moyen de l'augmentation. On a .... donc .... donc .... d'où .... c'est à dire ....