Exposants réels, cours de Terminale STG

F.Gaudon

21 mars 2010

Table des matières

1 Généralités

Propriété et définition :

> Soient a et b deux nombres réels avec a strictement positif. On note a^b le nombre réel strictement positif antécédent du nombre $b\ln(a)$ par la fonction ln, c'est à dire le nombre réel strictement positif qui vérifie $\ln(a^b) = b\ln(a)$.

Preuve :
Découle immédiatement de la dérivabilité (continuité) et de la stricte croissance de la fonction ln.

Propriété :

> Soient a, a', b et b' des nombres réels avec a et a' strictement positifs.
> - $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$
> - $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
> - $\frac{1}{a^b} = a^{-b}$
> - $\frac{a^b}{a'^b} = (\frac{a}{a'})^b$
> - $a^b a'^b = (aa')^b$
> - $(a^b)^{b'} = a^{bb'}$

Preuve :
- Il s'agit de montrer que $\ln(a^b a^{b'}) = (b+b')\ln(a)$ pour utiliser la définition de $a^{bb'}$. Or $\ln(a^b a^{b'}) = \ln(a^b)+\ln(a^{b'}) = b\ln(a)+b'\ln(a)$ d'après la définition de a^b et de $a^{b'}$. Donc $\ln(a^b a^{b'}) = (b+b')\ln(a)$ ce qu'il fallait démontrer.
- On a $\ln(\frac{a^b}{a^{b'}}) = \ln(a^b) - \ln(a^{b'}) = b\ln(a) - b'\ln(a) = (b-b')\ln(a)$ donc $\frac{a^b}{a^{b'}}$ est un nombre réel positif dont le logarithme népérien vaut $(b-b')\ln(a)$: c'est donc par définition le nombre $a^{b-b'}$.
- $\ln(\frac{1}{a^b}) = \ln(1) - \ln(a^b) = -\ln(a^b) = -b\ln(a)$ donc $\frac{1}{a^b}$ est un nombre réel positif dont le logarithme népérien vaut $-b\ln(a)$ d'où par définition $\frac{1}{a^b} = a^{-b}$.
- $\ln(\frac{a^b}{a'^b}) = \ln(a^b) - \ln(a'^b) = b\ln(a) - b\ln(a') = b(\ln(a) - \ln(a')) = b\ln(\frac{a}{a'})$ d'où le résultat.
- Découle de $\ln(a^b a'^b) = \ln(a^b) + \ln(a'^b) = b\ln(a) + b\ln(a') = b(\ln(a) + \ln(a')) = b\ln(aa')$.
- $\ln((a^b)^{b'}) = b'\ln(a^b) = bb'\ln(a)$.

Exemples :
- $3^4 \times 3^{10}$;
- $\frac{3^7}{3^5} = 3^2$;
- $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$;
- $3^4 \times 5^4 = (3 \times 5)^4$;
- $(3^4)^5 = 3^{20}$.

Exemple :
Un capital de 10 000 euros est placé durant deux ans et sept à mois à intérêts composés , au taux annuel de 3,5%.

$10000 \times (1 + \frac{3,5}{100})^{(2+\frac{7}{12})} \approx 10\,929,39$. La valeur acquise par le capital au bout de 2 ans et sept mois se monte donc à 10 929,39 euros.

2 Applications

2.1 Équations $x^n = a$

Propriété :

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$, le nombre $a^{\frac{1}{n}}$ appelé racine n-ième du nombre a.

Preuve :
On a $x^n = a$ si et seulement $\ln(x^n) = \ln(a)$ c'est à dire $n\ln(x) = \ln(a)$ donc $\ln(x) = \frac{1}{n}\ln(a)$ d'où $x = a^{\frac{1}{n}}$ par définition de $a^{\frac{1}{n}}$.

Exemple :
$x^3 = 64$ si et seulement si $x = 64^{\frac{1}{3}}$ c'est à dire $x = 4$.

Définition :

- $C_n = C_0 \times (1+t)^n$ est appelé *valeur acquise* par le capital C_0 au pendant n années au taux de t % à intérêts composés.
- C_0 est appelé *valeur actuelle* de C_n. On a $C_0 = \frac{C_n}{(1+t)^n}$.
- Deux taux correspondants à des périodes de placement différentes sont dits *équivalents* lorsque, à intérêts composés, ils donnent la même valeur acquise du capital au bout du même temps de placement.

Exemple :
C_0 est placé à 0,26 % par mois avec intérêts composés sur 12 mois. On a $C_{12} = C_0 \times (1 + \frac{0{,}26}{100})^{12} \approx C_0 \times 1,0317$ donc le taux annuel équivalent au taux mensuel de 0,26 % est 3,17 %.
En outre, soit t le taux trimestriel (on rappelle qu'il y a quatre trimestres dans une année), on a $(1+t)^4 \approx 1,0317$ donc $1 + t \approx 1,0317^{(1/4)} \approx 1,0078$ soit un taux trimestriel équivalent de 0,78%.

2.2 Application au calcul de taux moyens

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives de taux t_1, t_2, …, t_n, on appelle alors *coefficient multiplicateur moyen* le nombre

$$((1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n))^{\frac{1}{n}}$$

et *taux moyen* le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre

$$((1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n))^{\frac{1}{n}} - 1$$

. C'est le taux d'évolution, qui, s'il avait été identique à chacune des n évolutions, aurait donné la même valeur finale que les différents taux t_1, t_2, etc.

Exemples :

- Un prix initial de 100 € subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %. $(1+\frac{2}{100})(1-\frac{30}{100}))^{\frac{1}{2}} = 0,714^{\frac{1}{2}} \approx 0,8450$. En outre, $0,8450 - 1 = -0,1550$ soit 15,5 % de baisse annuelle en moyenne.
- Un produit a vu son prix multiplié par 1,6 en 4 ans. Soit t le taux moyen de l'augmentation. On a $(1+t)^4 = 1,6$ donc $1+t = 1,6^{\frac{1}{4}}$ donc $t = 1,6^{\frac{1}{4}} - 1$ d'où $t \approx 0,1247$ c'est à dire 12,47 % d'augmentation par an en moyenne.