Fonctions exponentielles, cours, classe de terminale STG

1 Fonction exponentielle de base e

1.1 Définitions

Définition :

On appelle *fonction exponentielle de base e* la fonction notée exp qui à tout réel x associe le nombre .... où e est le nombre réel tel que .... C'est à dire, pour tout x réel, ...
On note e le nombre réel image de 1 par cette fonction, c'est à dire ....

1.2 Propriétés algébriques

Propriétés :

- Pour tout $y > 0$ et tout x réel, $e^x = y$ s'écrit .... ;
- pour tout x réel, $\ln(e^x) =$ .... ;
- pour tout $y > 0$, $e^{\ln y} =$ .... ;
- pour tout x et x' réels, $e^x e^{x'} =$ ....
- $e^a = e^b$ si et seulement si .... ;
- $e^a < e^b$ si et seulement si ....

Preuve :

- $e^x = y$ donne .... donc .... d'où .... ;
- .... ;
- Conséquence des deux propriétés précédentes ;
- Découle des propriétés des exposants réels.
- $e^a = e^b$ si et seulement si .... c'est à dire .... donc ....
- Même raisonnement que précédemment.

1.3 Dérivabilité

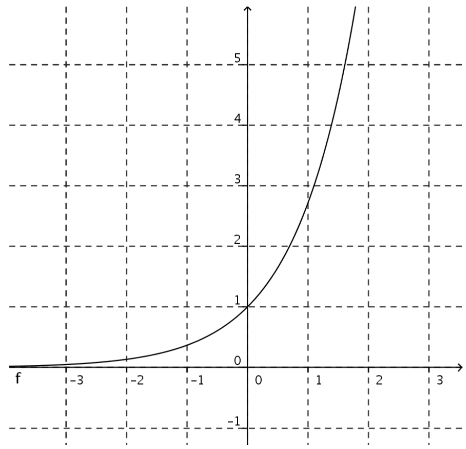
Propriétés :

- La fonction exponentielle de base e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $\exp'(x) =$ .... c'est à dire $(e^x)' =$ ....
- la fonction exponentielle de base e est .... sur $\mathbb{R}$;

1.4 Tableau de variations

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp(x)$		....	....	....	....	....	

1.5 Courbe représentative



1.6 Tableau de signe

x	$-\infty$ $+\infty$
$\exp(x)$	$+$

2 Fonctions exponentielles de base a

2.1 Définition

Définition :

> Soit $a > 0$. La *fonction exponentielle de base a* est la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre ....

Propriété :

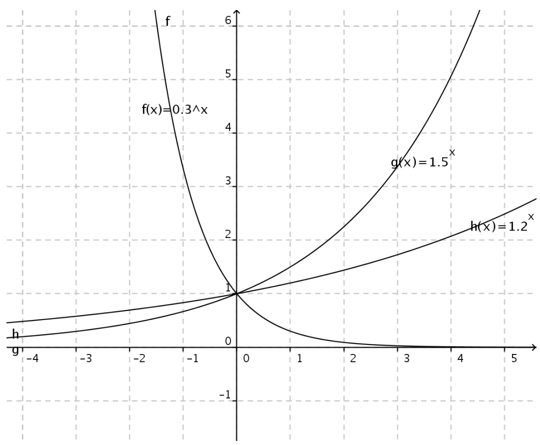
> Pour tout x réel, $a^x =$ .... ;

Preuve :
En effet, $\ln(a^x) =$ .... par définition et on a vu que $\exp(\ln(y)) =$ .... donc $\exp(\ln(a^x)) =$ .... et $\exp(x\ln(a)) =$ ....

2.2 Variations

Propriétés :

- La fonction $f : x \mapsto a^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;
- Si $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



2.3 Équations $a^x = k$

Propriété :

Soient a et k deux nombres réels strictement positifs avec $a \neq 1$.

- L'équation $a^x = k$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, le nombre $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;
- si $a > 1$, alors l'inéquation $a^x \geq k$ a pour ensemble de solutions $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;
- si $a < 1$, alors l'inéquation $a^x \geq k$ a pour ensemble de solutions $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Preuve :

- $a^x = k$ si et seulement si $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ c'est à dire $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $a^x = k$ si et seulement si $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ c'est à dire $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  Si $a > 1$, on a $\ln(a)\ldots\ldots\ldots$ donc $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  Si $a < 1$, on a $\ln(a)\ldots\ldots\ldots$ donc $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemples :

- $5^x = 125$ si et seulement si .... c'est à dire .... donc ....
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme $v_0 = 3$. Le nombre n tel que $v_n = 10$ vérifie .... c'est à dire .... donc $n = 6,603$. La suite est croissante car géométrique de raison plus grande que 1, le premier terme tel que $v_n \geq 10$ est donc $n = 7$.