Fonctions exponentielles, cours, terminale STG

F.Gaudon

21 mars 2010

Table des matières

1 Fonction exponentielle de base e

1.1 Définitions

Définition :

On appelle *fonction exponentielle de base e* la fonction notée exp qui à tout réel x associe le nombre e^x où e est le nombre réel tel que $\ln e = 1$.
C'est à dire, pour tout x réel, $\exp x = e^x$.
On note e le nombre réel image de 1 par cette fonction, c'est à dire $\exp(1) = e$.

1.2 Propriétés algébriques

Propriétés :

- Pour tout $y > 0$ et tout x réel, $e^x = y$ s'écrit $x = \ln y$;
- pour tout x réel, $\ln(e^x) = x$;
- pour tout $y > 0$, $e^{\ln y} = y$;
- pour tout x et x' réels, $e^x e^{x'} = e^{x+x'}$.
- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$;
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$.

Preuve :

- $e^x = y$ donne $\ln(e^x) = \ln(y)$ donc $x \ln(e) = \ln(y)$ donc $x = \ln(y)$;
- $\ln(e^x) = x \ln(e) = x$;
- $\ln(e^{\ln(y)}) = \ln(y) \ln(e) = \ln(y)$. Les deux nombres $e^{\ln(y)}$ et y ont le même logarithme népérien donc sont égaux ;
- Découle des propriétés des exposants réels.
- $e^a = e^b$ si et seulement $\ln(e^a) = \ln(e^b)$ si et seulement si $a \ln(e) = b \ln(e)$ c'est à dire $a = b$.
- Même raisonnement que la propriété précédente.

1.3 Dérivabilité

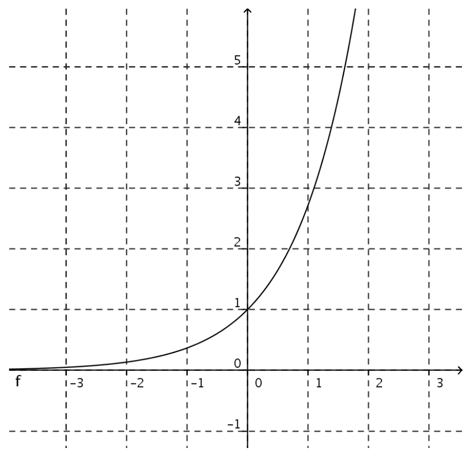
Propriétés :

- La fonction exponentielle de base e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $\exp'(x) = \exp(x)$ c'est à dire $(e^x)' = e^x$.
- la fonction exponentielle de base e est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

1.4 Tableau de variations

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
		$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	

1.5 Courbe représentative



1.6 Tableau de signe

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$	$+$	

2 Fonctions exponentielles de base a

2.1 Définition

Définition :

Soit $a > 0$. La *fonction exponentielle de base a* est la fonction qui à tout nombre réel x associe le nombre a^x.

Propriété :

Pour tout x réel, $a^x = e^{x \ln a}$;

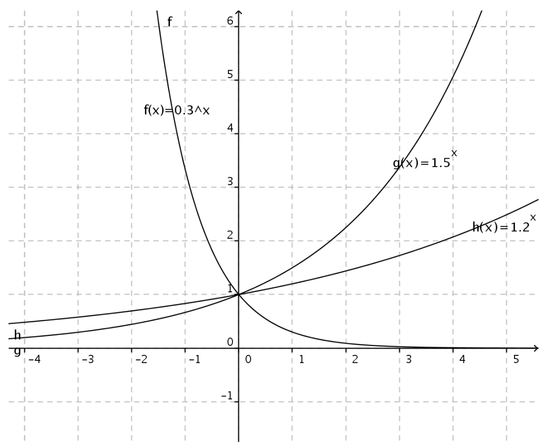
Preuve :
En effet, $\ln(a^x) = x \ln(a)$ par définition et on a vu que $\exp(\ln(y)) = y$ donc $\exp(\ln(a^x)) = a^x$ et $\exp(x \ln(a)) = a^x$.

2.2 Variations

Propriété :

- La fonction $f : x \mapsto a^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$;
- Si $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :
Voir chapitre sur les fonctions composées.



2.3 Équations $a^x = k$

Propriété :

Soient a et k deux nombres réels strictement positifs avec $a \neq 1$.
- L'équation $a^x = k$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, le nombre $\frac{\ln(k)}{\ln(a)}$;
- si $a > 1$, alors l'inéquation $a^x \geq k$ a pour ensemble de solutions $[\frac{\ln(k)}{\ln(a)}; +\infty[$;
- si $a < 1$, alors l'inéquation $a^x \geq k$ a pour ensemble de solutions $]-\infty; \frac{\ln(k)}{\ln(a)}]$.

Preuve :
- $a^x = k$ si et seulement si $\ln(a^x) = \ln(k)$ c'est à dire $x\ln(a) = \ln(k)$ donc $x = \frac{\ln(k)}{\ln(a)}$.
- $a^x = k$ si et seulement si $\ln(a^x) \geq \ln(k)$ c'est à dire $x\ln(a) \geq \ln(k)$. Si $a > 1$, on a $\ln(a) > 0$ donc $x \geq \frac{\ln(k)}{\ln(a)}$ et si $a < 1$, on a $\ln(a) < 0$ donc $x \leq \frac{\ln(k)}{\ln(a)}$.

Exemples :
- $5^x = 125$ si et seulement si $x = \frac{\ln(125)}{\ln(5)}$ c'est à dire $x = 3$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme $v_0 = 3$. Le plus petit rang n tel que $v_n \geq 10$ vérifie $3 \times 1,2^n \geq 10$ c'est à dire $n \geq \frac{\ln(\frac{10}{3})}{\ln(1,2)}$ donc $n \geq 6,03$. le premier terme tel que $v_n \geq 10$ est donc $n = 7$.