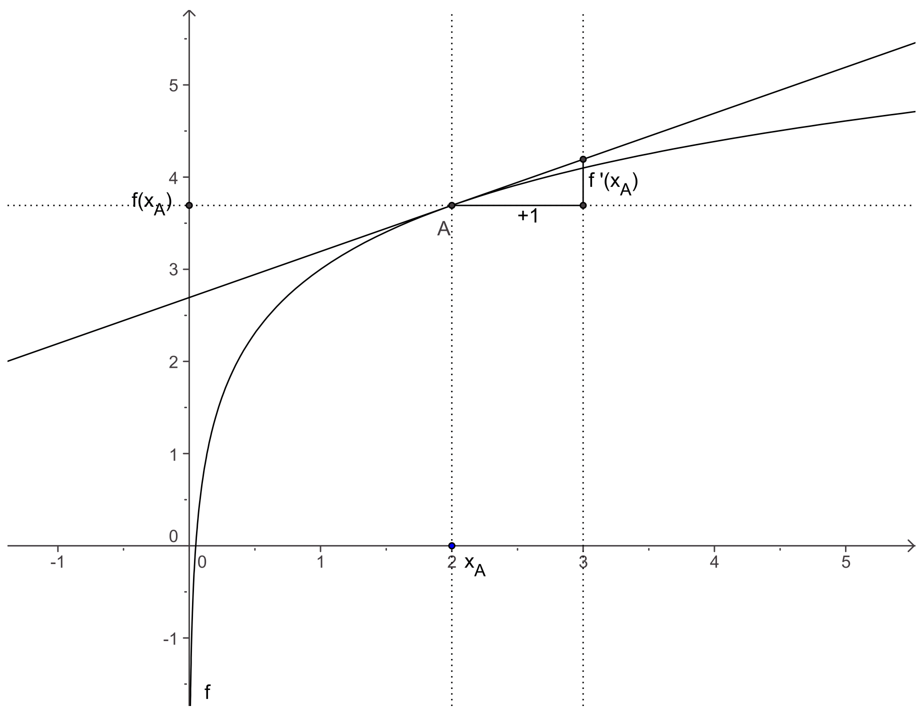
Dérivations de fonctions, classe de terminale STG

1 Nombre dérivé et tangente

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet en un point d'abscisse x_A avec $x_A \in I$ une tangente. Le nombre dérivé de f en x_A noté $f'(x_A)$ est le coefficient directeur de cette tangente.



Propriété (rappel) :

Le coefficient directeur m d'une droite (d) passant par des points A et B de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ est donnée par :

...

Propriété :

La tangente $\mathcal{T}_A$ au point A d'abscisse x_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une équation réduite de la forme

...

2 Fonction dérivée

Définition :

- Une fonction f est dite .... sur un intervalle I si en tout réel a de I il existe .... c'est à dire si en tout point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ il existe ....
- La fonction qui, à tout point a de I, associe le nombre dérivé de f en a s'appelle .... et est notée ....

Exemple :
Soit $f : x \longmapsto 2x - 3$ définie sur $I = \mathcal{R}$. On a le tableau de valeurs suivant :

x	0	1
$f(x)$	....	......

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en tout point. Cette tangente est la courbe C_f elle-même. Pour tout élément a de $\mathcal{R}$ on a donc $f'(a) =$ .... La fonction $f : x \longmapsto 2x - 3$ a donc pour dérivée la fonction $f' : x \longmapsto$ .... sur $\mathcal{R}$

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
k	...	$\mathbb{R}$
x	...	$\mathbb{R}$
$mx + p$	...	$\mathbb{R}$
x^2	...	$\mathbb{R}$
x^n	...	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	....	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	....	$]0; +\infty[$

Preuves :
Admises.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$ pour tout x réel f est une fonction affine, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a
$f'(x) =$ ....

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Les démonstrations de ce paragraphe sont admises.

3.1 Somme

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$ est définie et dérivable sur I et :

...

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + \sqrt{x}$. Alors on peut poser $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. u et v sont deux fonctions de référence. On a pour tout x strictement positif :

$u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ ....

donc $f'(x) =$ ....

3.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :

Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel, alors ku est définie et dérivable sur I et :

...

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3$. Alors on peut poser $u(x) = x^3$, la fonction u est une fonction de référence et on a pour tout x réel $u'(x) =$ .... donc $f'(x) =$ ....

3.3 Produit

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors uv est dérivable sur I et

....

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (6-7x)(3+4x)$. On peut poser $u(x) = 6-7x$ et $v(x) = 3+4x$ qui sont des fonctions affines.
Donc pour tout réel x, $u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ ....
$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) =$ ...
c'est à dire $f'(x) =$ ....

3.4 Quotient

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et

...

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout x réel différent de $\frac{3}{5}$ par $f(x) = \frac{x^2}{5x-3}$. On peut poser $u(x) = x^2$ et $v(x) = 5x-3$.
On a alors $u'(x) =$ .... et $v'(x) =$ .... d'où $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
donc ...

Remarque : on ne développe pas le dénominateur car le carré qui apparaît sera pratique dans l'étude du signe de la dérivée.

3.5 Puissances

Propriété :

Si u est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x \in I$ et si n est un entier naturel, alors la fonction définie par $f(x) = u(x)^n$ est dérivable en x et :

....

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-5x)^2$.
On a $u(x) =$ .... donc $u'(x) =$ .... et $f'(x) =$ ....