Dérivation de fonctions, cours, terminale STG

F.Gaudon

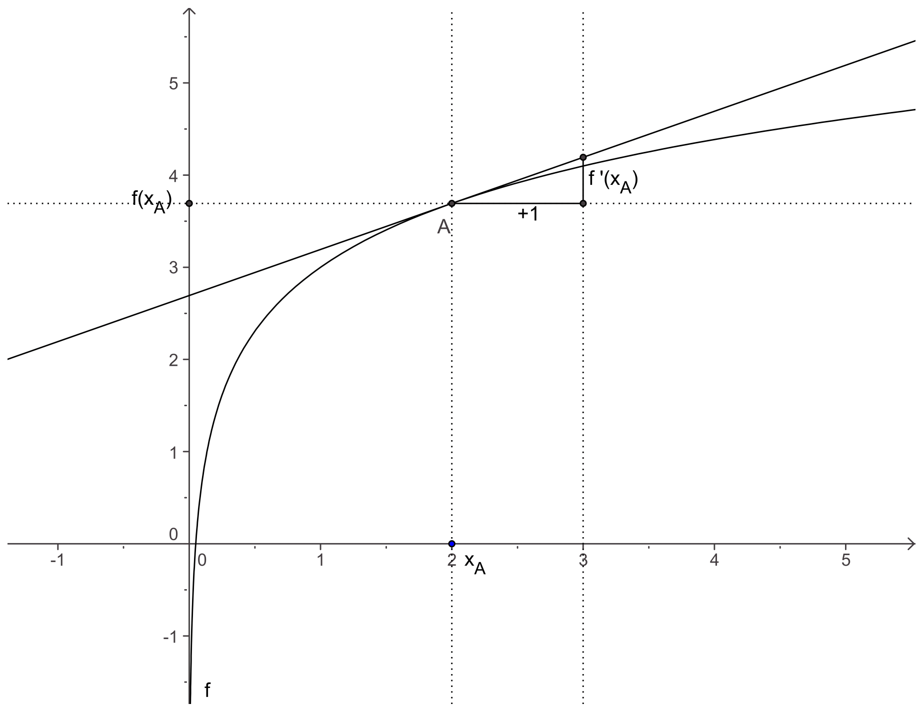
27 mai 2009

Table des matières

1 Fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet en un point d'abscisse x_A avec $x_A \in I$ une tangente. Le nombre dérivé de f en x_A noté $f'(x_A)$ est le coefficient directeur de cette tangente.



Propriété (rappel) :

Le coefficient directeur m d'une droite (d) passant par des points A et B de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ est donnée par :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Propriété :

La tangente $\mathcal{T}_A$ au point A d'abscisse x_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une équation réduite de la forme $y = f'(x_A) + p$ où p est un nombre réel.

Définition :

- Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si en tout réel a de I il existe un nombre dérivé $f'(a)$, c'est à dire si en tout point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ il existe une tangente à la courbe en ce point.
- La fonction qui, à tout point a de I, associe le nombre dérivé de f en a s'appelle la fonction dérivée de f et est notée f'.

Exemple :
Soit $f : x \longmapsto 2x - 3$ définie sur $I = \mathcal{R}$. On a le tableau de valeurs suivant :

x	0	1
$f(x)$	-3	-1

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en tout point. Cette tangente est la courbe C_f elle-même. Pour tout élément a de $\mathcal{R}$ on a donc $f'(a) = 2$. La fonction $f : x \longmapsto 2x - 3$ a donc pour dérivée la fonction $f' : x \longmapsto 2$ sur $\mathcal{R}$

2 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx + p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Preuves :
Admises.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$ pour tout x réel f est une fonction affine, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a $f'(x) = -3$.

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Les démonstrations de ce paragraphe sont admises.

3.1 Somme

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors $u + v$ est définie et dérivable sur I et :

$$(u + v)' = u' + v'$$

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + \sqrt{x}$. Alors on peut poser $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. u et v sont deux fonctions de référence. On a pour tout x strictement positif $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :

> Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel, alors ku est définie et dérivable sur I et :
>
> $$(ku)' = ku'$$

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3$. Alors on peut poser $u(x) = x^3$, la fonction u est une fonction de référence et on a pour tout x réel $u'(x) = 3x^2$ donc $f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.

3.3 Produit

Propriété :

> Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors uv est dérivable sur I et
>
> $$(uv)' = u'v + v'u$$

Exemple :
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = (6 - 7x)(3 + 4x)$. On peut poser $u(x) = 6 - 7x$ et $v(x) = 3 + 4x$ qui sont des fonctions affines. Donc pour tout réel x, $u'(x) = -7$ et $v'(x) = 4$ et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -7(3+4x) + 4(6-7x)$ c'est à dire $f'(x) = -21 - 28x + 24 - 28x = 3 - 56x$.

3.4 Quotient

Propriété :

> Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et
>
> $$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Exemple :
Soit f la fonction définie pour tout x réel différent de $\frac{3}{5}$ par $f(x) = \frac{x^2}{5x-3}$. On peut poser $u(x) = x^2$ et $v(x) = 5x - 3$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 5$ d'où $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2x(5x-3) - 5x^2}{(5x-3)^2} = \frac{5x^2 - 6x}{(5x-3)^2}$ (on ne développe pas le numérateur car cette écriture sera la plus pratique dans les applications des dérivées).

3.5 Puissances

Propriété :

Si u est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x \in I$ et si n est un entier naturel, alors la fonction définie par $f(x) = u(x)^n$ est dérivable en x et $f'(x) = nu'(x)u(x)^{n-1}$ que l'on écrit aussi $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-5x)^2$. On a $f'(x) = -5 \times 2 \times (2-5x) = -10(2-5x)$.