Applications de la dérivation, TSTG

F. Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

30 mai 2009

Plan

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- *Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, ... ;*
- *si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, ... ;*
- *si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, ...*

Exemple :
Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-1		0		5
variations de $f(x)$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	...		...		...		...
$f'(x)$		...	...	...	...	...	

Plan

Propriété

- *Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$ sauf en un nombre fini de points où elle s'annule), alors f est .... (resp. strictement ....) sur I ;*
- *si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$ sauf en un nombre fini de points où elle s'annule), alors f est .... (resp. strictement ....) sur I ;*
- *si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est .... sur I.*

Exemple avec un tableau de signes :
Soit f une fonction définie sur $[-3;5]$ et telle que :

x	-3		-2		0		5
signe de $f'x)$		+	0	-	0	+	

Le tableau de variations de f est :

x	...		...		...		...
variations de $f(x)$		...		...		...	

Exemples par le calcul :

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 5$.
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
  $f'(x) =$ ....
  Donc pour tout réel x, $f'(x)$......0 et par conséquent, f est une fonction .... sur $\mathbb{R}$.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{2x+3}$ pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$.
  On a $f'(x) =$ ....
  Pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$, le carré $(2x + 3)^2$ est .... donc $f'(x)$.........0 donc f est .... strictement sur $[3; +\infty[$.

Plan

1. Signe de la dérivée et variations de la fonction
   - Du sens de variation de la fonction au signe de la dérivée
   - Du signe de la dérivée au sens de variation
2. Dérivée et tableau de variations
   - Dérivée et tableau de variation d'une fonction
   - Dérivée, extrema et tableau de variation

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur $\mathcal{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$ ....
$f'(x) \geq 0$ si et seulement si .... c'est à dire x....................
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	...	$+\infty$
$f'(x)$	...	0	...
$f(x)$	...		...

Exemple 2 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
Pour tout réel $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \dots \\ &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		...		...		...		$+\infty$
$f'(x)$		...	...	...	...	...	...	...	
$f(x)$		...		...	...	...		...	

Plan

1. Signe de la dérivée et variations de la fonction
   - Du sens de variation de la fonction au signe de la dérivée
   - Du signe de la dérivée au sens de variation
2. Dérivée et tableau de variations
   - Dérivée et tableau de variation d'une fonction
   - Dérivée, extrema et tableau de variation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- *Dire que $f(x_0)$ est un maximum local (resp. minimum local) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).*
- *Un minimum local ou un maximum local est appelé un extremum local.*

Propriété

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a;b[$)

- *Si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0, alors $f'(x_0) = ...$;*
- *si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un ....*

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x		x_0	
$f(x)$	...		...
		...	

Cas d'un maximum :

x		x_0	
		...	
$f(x)$	...		...