Applications de la dérivation, cours, terminale STG

1 Signe de la dérivée et variations de la fonction

1.1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, ... ;
- si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, ... ;
- si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, ...

Preuve :
Admis

Exemple :
Soit f une fonction définie sur $[-3;5]$ et telle que :

x	-3		-1		0		5
variations de $f(x)$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	...		...		...		...
$f'(x)$		...	...	...	...	...	

1.2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

- Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$ sauf en un nombre fini de points où elle s'annule), alors f est .... (resp. strictement ....) sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$ sauf en un nombre fini de points où elle s'annule), alors f est .... (resp. strictement ....) sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est .... sur I.

Preuve :
Admis

Exemple avec un tableau de signes :
Soit f une fonction définie sur $[-3;5]$ et telle que :

x	-3		-2		0		5
signe de $f'x)$		$+$	0	-	0	$+$	

Le tableau de variations de f est :

x	...		...		...		...
variations de $f(x)$		...		...		...	

Exemples par le calcul :

.

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$ ....
Donc pour tout réel x, $f'(x)$........0 et par conséquent, f est une fonction .... sur $\mathbb{R}$.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{2x+3}$ pour tout x appartenant à $[3;+\infty[$.
On a $f'(x) =$ ....
Pour tout x appartenant à $[3;+\infty[$, le carré $(2x+3)^2$ est .... donc $f'(x)$...........0 donc f est .... strictement sur $[3;+\infty[$.

2 Dérivée et tableau de variation d'une fonction

2.1 Tableau de variation

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur $\mathcal{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$ ....
$f'(x) \geq 0$ si et seulement si .... c'est à dire ....
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		...		$+\infty$
$f'(x)$		...	0	...	
$f(x)$		...		...	

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Pour tout réel $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		...		...		...		$+\infty$
$f'(x)$		...	...	...	...	...	...	...	
$f(x)$		...		...	...	...		...	

2.2 Dérivée, extrema et tableau de variation

Définition :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.
> - Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* (resp. *minimum local*) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
> - Un minimum local ou un maximum local est appelé un extremum local.

Propriété :

> Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a; b[$)
> - Si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0, alors $f'(x_0) = \ldots$;
> - si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un ....

Preuve :
admis

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x		x_0	
$f(x)$	...	...	...

Cas d'un maximum :

x		x_0	
$f(x)$	...	...	...