Applications de la dérivation, cours, terminale STG

F.Gaudon

27 mai 2009

Table des matières

1 Signe de la dérivée et variations de la fonction

1.1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
> - Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$;
> - si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$;
> - si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Preuve :
Admis

Exemple :
Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-1		0		5
variations de $f(x)$	4	↘	-2	↗	1	↘	0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	-3		-1		0		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

1.2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

> - Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$ sauf en quelques points où elle s'annule), alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur I ;
> - si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$ sauf en quelques points où elle s'annule), alors f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur I ;
> - si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Preuve :
Admis

Exemple avec un tableau de signes :
Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-2		0		5
signe de $f'x)$		+	0	-	0	+	

Le tableau de variations de f est :

x	-3	-2	0	5
variations de $f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Exemples par le calcul :

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 12x^2$. Donc pour tout réel x, $f'(x) > 0$ et par conséquent, f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{2x+3}$ pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$.
  On a $f'(x) = -\frac{8}{(2x+3)^2}$.
  Pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$, le carré $(2x+3)^2$ est toujours positif donc $f'(x) < 0$ donc f est décroissante strictement sur $[3; +\infty[$.

2 Dérivée et tableau de variation d'une fonction

2.1 Tableau de variation

Exemples :

- Soit f la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur $\mathcal{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 6x + 7$.
  $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $6x + 7 \geq 0$ c'est à dire $x \geq \frac{-7}{6}$.
  On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
  Pour tout réel $x \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{x^2 - 1}{x^2} \\
&= \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}
\end{aligned}
$$

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	$\|\|$	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

2.2 Dérivée, extrema et tableau de variation

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* (resp. *minimum local*) de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un extremum local.

Propriété :

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a;b[$)

- Si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0, alors $f'(x_0) = 0$;
- si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.

Preuve :
admis

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x		x_0	
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

Cas d'un maximum :

x		x_0	
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$