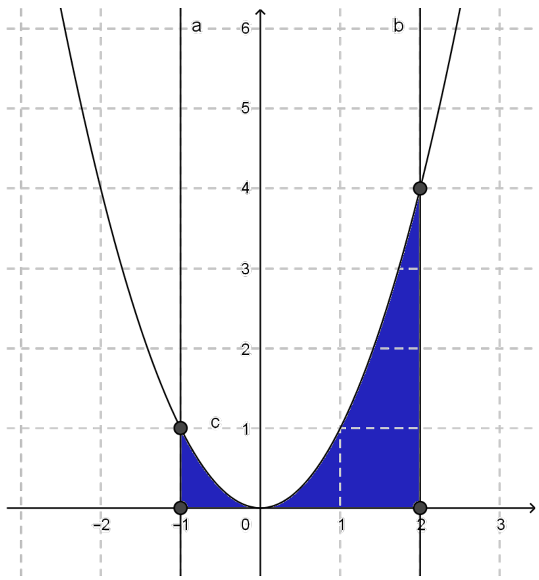
Intégration, cours, terminale S

1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. ortogonal. On appelle *intégrale* de a à b de la fonction f la mesure de l'aire ....
On note .... cette aire.



Remarques :

- Pour toute fonction continue et positive sur $[a; b]$, on a $\int_a^b f(t)dt \geq ....$;
- Si $b = a$, on a $\int_a^a f(t)dt = ...$;

Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a; c]$ et b un réel de I. Alors :

....

Propriété de conservation de l'ordre :

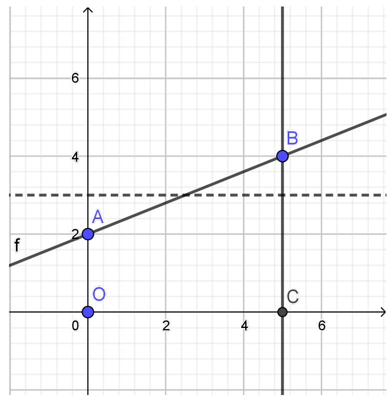
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a; b]$ telles que pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors ....

Définition :

On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a;b]$, le réel

$$\mu = ...$$

Remarque :
Si f est positive sur $[a;b]$, la valeur moyenne s'interprète géométriquement comme la hauteur du rectangle de côté $b-a$ et de même aire que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de la fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



2 Lien entre intégrale et primitives

Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. La fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée ....

Propriété :

Si f est continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = ...$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a;b]$.

Preuve :
Soit F une primitive de f.
D'après la propriété précédente, G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f et $G(a) = 0$.
Donc, il existe une constante réelle c telle que pour tout x de $[a;b]$ $F(x) = G(x) + c$.
On a alors $F(b) - F(a) = ...$

Exemple :
$\int_1^2 5x^2dx = ...$

3 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Propriété :

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété et définition :

Pour toute fonction f continue sur un intervalle I et pour tous les réels a et b de I, on définit l'intégrale de a à b de f par

....

où F est une primitive quelconque de f sur I.

Preuve :
Il faut démontrer que la définition est indépendante de la primitive F de f utilisée.
Soient donc F et G deux primitives de f. Il existe donc un réel c tel que $G = F + c$.
D'où $G(b) - G(a) =$....
Le nombre obtenu ne dépend donc pas de la primitive de f utilisée.

Notation :

On note aussi $\int_a^b f(x)dx =$ .....

Exemple :
$\int_0^1 \frac{-5x}{x^2+3}dx = ...$

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée ....

Propriété, relation de Chasles :

Soit f une fonction continue sur I et a, b et c trois réels de I. Alors :

....

Preuve :
Soit F une primitive de f. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx &= \text{..............} \\ &= \text{............} \\ &= \int_a^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

Conséquences :

Avec les mêmes hypothèses que précédemment,
- $\int_a^a f(x)\,dx = \text{......}$
- $\int_b^a f(x)\,dx = \text{.........}$

Preuve :
D'une part, $\int_a^a f(x)\,dx = \text{.........}$ et d'autre part, $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx$ d'où les deux résultats.

Propriété de linéarité de l'intégrale :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel. Alors

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \text{................}$$

et

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \text{......................}$$

Preuve :
Soient F et G des primitives de f et g respectivement. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ car $(F+G)' = F' + G' = \text{.......}$
et on a $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx =$............. ....
De même, kF est une primitive de kf et $\int_a^b kf(x)\,dx =$........... ....

Propriété de positivité de l'intégrale :

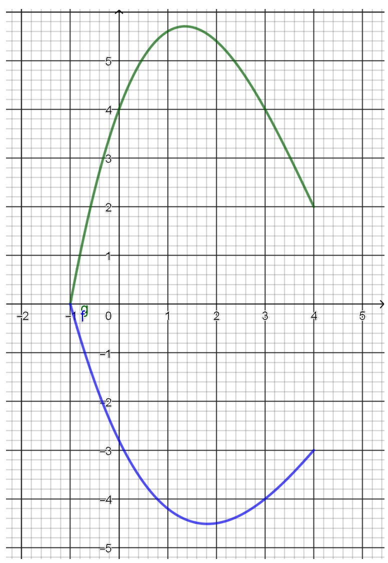
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
- Si pour tout réel x de I, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \text{....}$;
- si pour tout réel x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\text{....}\int_a^b g(x)\,dx$.

Preuve :

- Si f est positive, alors, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la partie de plan comprise entre les droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ donc est positive.
- Si pour tout x réel de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$ implique $g(x)-f(x)$.....0 c'est à dire que $g-f$ est ....
D'où $\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$.....0 d'après le point précédent ce qui s'écrit encore $\int_a^b g(x)\,dx$....... $\int_a^b f(x)\,dx$.

Propriété :

- Si f est continue et négative sur $[a;b]$, l'aire exprimée en unités d'aire de la surface plane délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $-\int_a^b f(x)dx$.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $f \leq g$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface comprise entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b g(x) - f(x)dx$.



Définition :

On appelle *valeur moyenne* d'une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$, le réel

$$\mu = \ldots\ldots\ldots\ldots$$