Compléments sur la dérivation et continuité, cours, terminale S

F.Gaudon

1$^{\text{er}}$ septembre 2016

Table des matières

1 Fonction dérivée, tangente

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a. Dire que f est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)$, signifie que le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand h tend vers 0. Lorsque f est dérivable en tout réel a de I, f est dite dérivable sur I et $f' : x \mapsto f'(x)$ pour tout $x \in I$ est appelée fonction dérivée de f sur I.

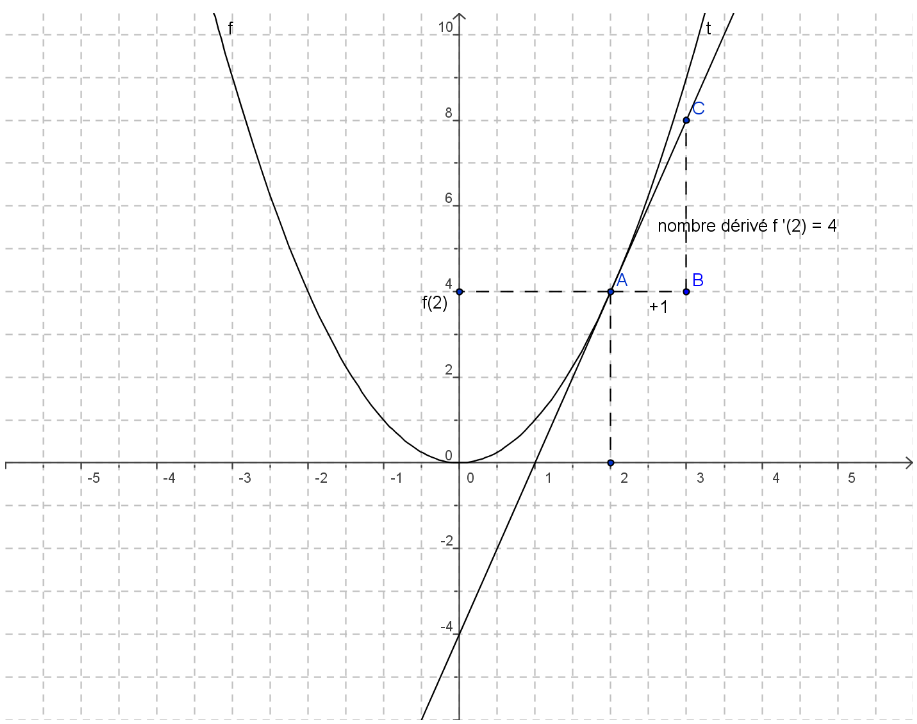
Remarque :
On définit de même la dérivée seconde f'' comme dérivée de f', puis la dérivée troisième $f^{(3)}$ et ainsi de suite.

Propriété :

Dire que f est dérivable en a, signifie que la courbe représentative de f dans un repère admet au point A de coordonnées $(a; f(a))$ une tangente $\mathcal{T}$ de coefficient directeur $f'(a)$.
L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est alors

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

.



2 Dérivation de fonctions

2.1 Fonctions dérivées usuelles (rappel)

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx+p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-n\frac{1}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

2.2 Opérations sur la dérivation

Propriété :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel. Alors $u+v$, ku, uv sont dérivables sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout $a \in I$ tel que $v(a) \neq 0$ et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(k\,u)' = k\,u'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$$

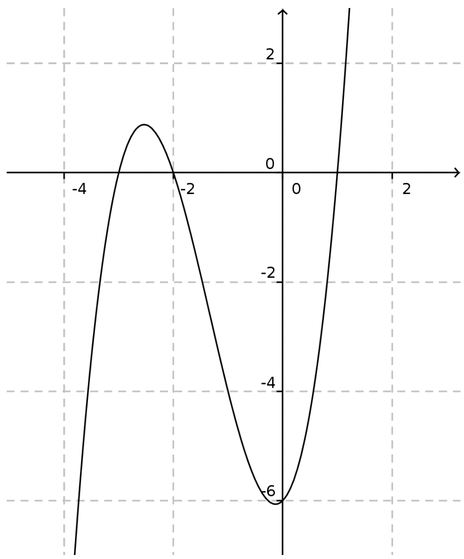
3 Notion intuitive de continuité

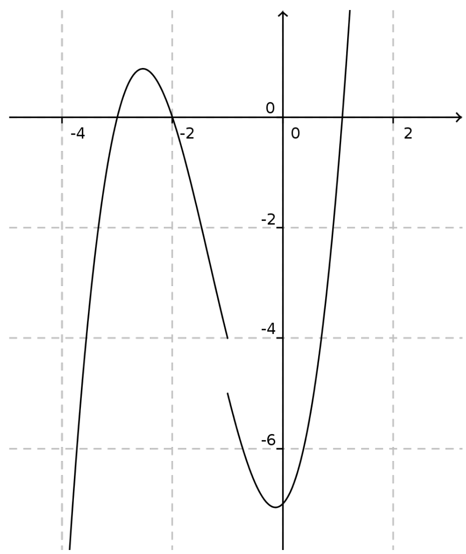
Définition intuitive :

Une fonction f définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture.

Exemple :

Ci-dessous la fonction f, définie par $f(x) = (x+2)(x-1)(x+3)$ sur $\mathbb{R}$, est continue sur $]-\infty;+\infty[$ alors que la fonction g définie sur $]-\infty;-1]$ par $g(x) = f(x)$ et sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - 1$ n'est pas continue en -1.





Propriétés (admises) :

- Les fonctions affines, carrées, inverse, racine carrée, valeur absolue sont continues sur leur ensemble de définition.
- Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarque :

La réciproque n'est pas vraie : la fonction valeur absolue est continue sur $]-\infty;+\infty[$ mais n'est pas dérivable en 0.

Convention :

Une flèche dans le tableau de variations d'une fonction f indique :

- la stricte croissance ou stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction f sur cet intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

> Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe *au moins* un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Propriété :

> Si de plus f est *strictement monotone* sur I, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un *unique* réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

x	a		c		b
					$f(b)$
				$\nearrow$	
f			k		
		$\nearrow$			
	$f(a)$				

x	a		c		b
	$f(a)$				
		$\searrow$			
f			k		
				$\searrow$	
					$f(b)$

4 Dérivation de fonctions composées

Propriété :

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux réels et J l'ensemble des réels x tels que $ax + b \in I$. Alors la fonction $g : x \longmapsto f(ax + b)$ est dérivable sur J et pour tout x réel de J,
>
> $$g'(x) = af'(ax + b)$$
>
> En particulier,
>
> $$((ax + b)^n)' = a \times n(ax + b)^{n-1}$$
> $$(\sqrt{ax + b})' = \frac{a}{2\sqrt{ax + b}}$$

Preuve :
admise

Exemple :

- Soit g la fonction définie sur $\mathcal{R}$ par $g(x) = (4x - 5)^2$. g est dérivable sur $\mathcal{R}$ et : $g'(x) = 2 \times 4 \times (4x - 5) = 8(4x - 5) = 3x - 40$.
- Soit h la fonction définie sur $I =]\frac{-1}{3}; +\infty[$ par $h(x) = 5\sqrt{3x + 1}$. h est dérivable sur I et : $h'(x) = 5 \times \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{15}{2\sqrt{3x+1}}$.

Propriété :

- Soit n un entier naturel non nul. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I dans le cas $n < 0$. Alors u^n est dérivable sur I et :

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}$$

- On considère une fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Preuve :

- Preuve dans le cas $n \geq 1$:
  Pour $n = 1$, $(u^1)' = u'$ et $nu'u^{n-1} = u'$ donc la propriété est vraie au rang 1.
  Supposons la propriété vraie pour un rang $n \geq 1$, c'est à dire que pour un rang n, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
  Alors $u^{n+1} = u \times u^n$ donc en utilisant la dérivation de produits $(u^{n+1})' = (u^n)'u + u'u^n$. En outre, par hypothèse de récurrence, on a $(u^n) = nu'u^{n-1}$. D'où $(u^{n+1})' = nu'u^{n-1}u + u'u^n = nu'u^n + u'u^n = (n+1)u'u^n$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
  Par récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.
- Admise.

Exemple :
Soit g la fonction définie sur $\mathcal{R}$ par $g(x) = (5x^4 + 7)^3$. g est dérivable sur $\mathcal{R}$ et :
$g'(x) = 3 \times (5 \times 4x^3 + 0)(5x^4 + 7)^2 = 60x^3(5x^4 + 7)^2$

Remarque :
Si u est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x \in I$ et si v est une fonction dérivable en $u(x)$, alors la fonction g définie par $g(x) = v(u(x))$ est dérivable en x et :

$$g'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$