Nombres complexes, cours, terminale S

1 Notion de nombre complexe

Définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé *ensemble des nombres complexes* tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des .... ;
- l'addition et la multiplication des nombres complexes « prolongent » l'addition et la multiplication des nombres réels. (c'est à dire que l'addition ou la multiplication de deux nombres réels considérés comme nombres complexes est l'addition ou la multiplication usuelle sur les nombres réels) ;
- Il existe un unique nombre complexe noté i tel que ....
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z =$ .... où ....

L'écriture $z = a + ib$ est appelée .... du nombre complexe z.

Le nombre réel a est appelé .... du nombre complexe z et noté ....

Le nombre réel b est appelé .... du nombre complexe z et noté ....

Si $a = 0$, le nombre z s'écrit $z =$ .... avec .... On dit alors que z est un ....

Exemples :

Le réel 3 est aussi un nombre complexe, il s'écrit $3 = 3 + 0 \times i$. Le nombre $3 + 2i$ est un nombre complexe non réel. Sa .... est 2 et sa .... est 3..

Remarque :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même .... et la même ....

2 Opérations sur les nombres complexes

Définition :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a'i + b'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' réels.

- On définit l'opposé de z et on note $-z$ le nombre $-z = -a - ib$.
- On définit l'addition des nombres complexes z et z' et on note $z + z'$ le nombre :

$$z + z' =$$

....

- On définit la multiplication des nombres complexes z et z' et on note zz' le nombre :

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') =$$

....

- Tout nombre complexe non nul z admet un inverse, c'est à dire un nombre z' tel que .... , noté $z' = \frac{1}{z}$.

Remarque :

L'addition et la multiplication dans les complexes prolongent l'addition et la multiplication dans les réels car, si z et z' sont réels, c'est $z = a$ et $z' = a'$ avec a et a' réels, alors $z + z' = a + a'$ et $zz' = aa'$.

Exemples :

- $(3 + 2i) + (5 - 4i) =$...........
- $(3 + 2i)(5 - 4i) =$........................
- $\frac{3+21}{5-4i} =$....................

Propriétés :

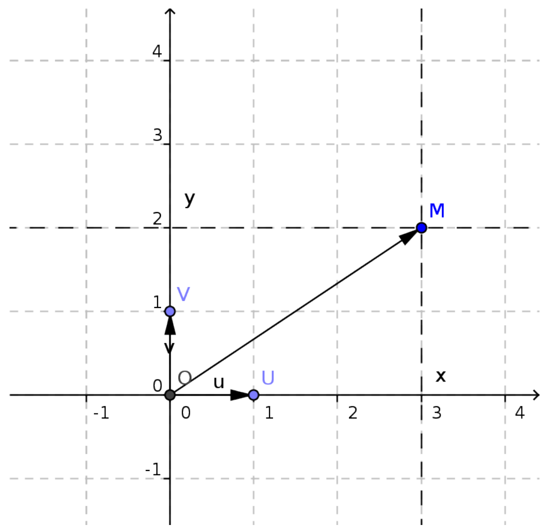
Pour tous les nombres complexes z et z',

- $(z + z')^2 =$.................
- $(z - z')^2 =$.................
- $(z - z')(z + z') =$...............
- $zz' = 0$ si et seulement si .... ou ....

3 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition :
Soit $(O;\vec{u};\vec{v})$ un repère orthonormé du plan.

- À tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, on associe le point M de coordonnées $(a;b)$. On dit que M est .... de z et que $\vec{OM}$ est .... de z.
- Tout point M de coordonnées $(x;y)$ est le .... d'un unique complexe $z = x + iy$. On dit que z est .... du point M et du vecteur $\vec{OM}$.



Remarques :

- Les nombres réels sont les .... des points de l'axe des .... qui est pour cette raison aussi appelé axe ....
- Les nombres imaginaires purs sont les .... des points de l'axe des .... qui est pour cette raison aussi appelé axe ....

Propriétés :
On considère deux points A et B du plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives z_A et z_B, alors

- le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe ....
- L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I =$............... .

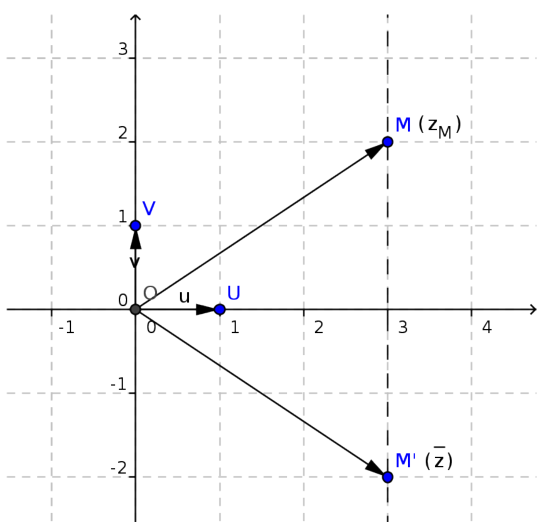
Preuve :

- A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et par ailleurs, $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$. Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées .... dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et donc pour affixe .... dans ce repère.
  Or $z_B - z_A =$.....
- On sait que $x_I =$............... et $y_I =$........................
  Or $\frac{z_A+z_B}{2} =$....

4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition :
Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$ avec a et b réels, on appelle *conjugué de z* le nombre noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} =$........... .

Remarque :
Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisse.



Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

- z est réel si et seulement $\bar{z}=$...... ;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z}=$........ ;
- $\overline{z+z'}=$................ ;
- $\overline{zz'}=$................ ;
- pour tout entier naturel n, $\overline{z^n}=$.......... ;
- si $z\neq 0$, $\overline{\frac{1}{z}}=$.......... ;
- si $z\neq 0$, $\overline{\frac{z'}{z}}=$............... ;

Preuve :

- Soit $z=a+ib$ avec a et b réels. $z=$....... s'écrit $a+ib=$....... c'est à $ib=$..... ou encore $2ib=$...... ce qui équivaut à $b=0$ c'est à dire $z=a$ réel.
- Soit $z=a+ib$ avec a et b réels. $\bar{z}=$....... équivaut à $a-ib=$....... c'est à dire $a-ib=$....... ce qui équivaut à $2a=$..... donc à $a=0$.
- Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$. $\bar{z}+\bar{z}'=$............. ....
- Soient $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$. D'une part, $\overline{zz'}=$.............. .... et d'autre part, $\bar{z}\bar{z}'=$............... .... d'où l'égalité.
- Initialisation : l'égalité est de manière évidente vraie pour $n=0$ car $z^0=1$ donne $\overline{z^0}=\bar{z}^0=1$.

  Hérédité : Si l'égalité $\overline{z^n}=$............ est vraie pour un rang $n\in\mathbb{N}$, alors pour $n+1$, on a $\overline{z^{n+1}}=$................. D'après la propriété précédente (qui n'est autre que le cas $n=2$...), on peut écrire que $\overline{z^{n+1}}=$................ . Or, par hypothèse de récurrence, on a $\overline{z^n}=$.......... donc $\overline{z^{n+1}}=$........................ . La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

  Conclusion : Par récurrence, on en déduit qu'elle est vraie pour tout rang $n\in\mathbb{N}^*$
- Soit $z=a+ib$, alors $\overline{\frac{1}{z}}=$............ .... en multipliant par .... le dénominateur et le numérateur. Ceci est encore égal à $\frac{a+ib}{a^2+b^2}$.

  Par ailleurs, $\frac{1}{\bar{z}}=$................. .... en multipliant numérateur et dénominateur par .... D'où l'égalité.
- $\overline{\frac{z'}{z}}=$.................... ....

5 Équations du second degré à coefficients réels

Théorème :
On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- Si Δ......., alors l'équation admet deux solutions réelles x_1 =.............. et x_2 =................. ;
- Si Δ......... alors l'équation admet une unique solution réelle .... ;
- Si Δ........, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées z_1 =................... et z_2 =..................... .

Preuve (troisième cas) :
Dans tous les cas, $az^2 + bz + c = a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = a((z - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a((z - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$ est l'écriture canonique de $az^2 + bz + c$.
L'équation s'écrit donc $(z - (-\frac{b}{2a}))^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$.
Si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$ donc $\sqrt{-\Delta}$ existe et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = -(-\Delta) = \Delta$ donc $i\sqrt{-\Delta}$ a pour carré Δ.
Par conséquent, $z - (-\frac{b}{2a}) = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z - (-\frac{b}{2a}) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ donc $z = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

6 Module d'un nombre complexe

Définition :
Soit $z = ai + b$ avec a et b réels un nombre complexe. On appelle *module de z* le nombre noté $|z|$ défini par $|z|$ =.............. . Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, si M est l'image de z, alors $|z|$ =......... .

Remarque :
Si x est un nombre réel, alors le module de x et la valeur absolue de x sont égaux, d'où l'utilisation de la même notation.

Exemple :
Si $z = -3 + \sqrt{3}i$ alors $|z|$ =.................. ....

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z' :

- $|-z|=$ .... et $|\bar{z}|=$ .... ;
- $|zz'|=$.......... ;
- pour tout entier naturel n non nul, $|z^n|=$........... ;
- $|\frac{z}{z'}|=$.............. ;

Preuve :

- Évident.
- Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels.

  D'une part, on a $zz'=$............................ donc $|zz'|^2=$..................... .... d'où $|zz'|^2=a^2a'^2-2aa'bb'+b^2b'^2+a'^2b^2+2aa'bb'+a^2b'^2=a^2a'^2+b^2b'^2+a^2b'^2+a'^2b^2$.

  D'autre part, on a $|z|^2=$................. et $|z'|^2=$.................. donc $(|z||z'|)^2=(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)=aa'^2+a^2b'^2+a'^2b^2+a^2b'^2$.

  D'où l'égalité $|zz'|^2=(|z||z'|)^2$ et l'égalité voulue.
- Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.

  Initialisation : pour $n=1$, ... donc la propriété est vraie pour $n=1$. Hérédité : si pour un rang $n\in\mathbb{N}^*$,............... ...., alors $|z^{n+1}|=$........................ d'après la propriété précédente. Puisque par hypothèse de récurrence, $|z^n|=$ ...., alors $|z^{n+1}|=$........................... C'est la propriété au rang $n+1$ Conclusion : Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraie, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|z^n|=|z|^n$.
- Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels.

  D'une part $\frac{z}{z'}=\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'+ib')}=\frac{aa'+bb'+i(ba'-ab')}{a'^2+b'^2}$ d'où $|\frac{z}{z'}|^2=(\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2})^2+(\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2})^2=\frac{a^2a'^2+b^2b'^2+b^2a'^2+a^2b'^2}{(a'^2+b'^2)^2}=\frac{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}{(a'^2+b'^2)^2}=\frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}$.

  D'autre part, $(\frac{|z|}{|z'|})2=\frac{(a^2+b^2)}{(a'^2+b'^2)}$.

  D'où l'égalité.
- $z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$.

Propriétés :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :

- $AB =$................ ;
- L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels $|z - z_A| = |z - z_B|$ est ....

Preuve :

- Soit M tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$. M a pour affixe $z_B - z_A$ et $OM = |z| =$.......................
- $|z - z_A| = |z - z_B|$ se traduit géométriquement par .... c'est à dire que M appartient à ....