Nombres complexes, cours, Terminale S

F.Gaudon

18 décembre 2016

Table des matières

1 Notion de nombre complexe

On sait depuis les babyloniens résoudre les équations dites du second degré (c'est à dire de la forme $ax^2 + bx + c = 0$). Cependant, on est resté longtemps sans méthode générale de résolution des équations du troisième degré. Ce n'est qu'au XVI^{e} siècle qu'un mathématicien italien Tartaglia découvrit une méthode générale de résolution de ces équations. Il eut pour cela recourt à l'utilisation de ce qui fut qualifié à l'époque d'artifice : une racine carrée de -1, c'est à dire un nombre x imaginaire tel que $\sqrt{x} = -1$. Ce n'est que par la suite que ce nombre acquèrera sont statut de nombre, sera renommé i et donnera naissance aux nombres complexes qui seront étudiés en tant que nombres et permettront le développement de pans entiers des Mathématiques.

Définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ et appelé *ensemble des nombres complexes* tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- l'addition et la multiplication des nombres complexes « prolongent » l'addition et la multiplication des nombres réels. (c'est à dire que l'addition ou la multiplication de deux nombres réels considérés comme nombres complexes est l'addition ou la multiplication usuelle sur les nombres réels) ;
- Il existe un unique nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.

L'écriture $z = a + ib$ est appelée *forme algébrique* du nombre complexe z.

Le nombre réel a est appelé *partie réelle* du nombre complexe z et noté $\mathcal{R}e(z)$.

Le nombre réel b est appelé *partie imaginaire* du nombre complexe z et noté $\mathcal{I}m(z)$.

Si $a = 0$, le nombre z s'écrit $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. On dit alors que z est un imaginaire pur.

Exemples :

Le réel 3 est aussi un nombre complexe, il s'écrit $3 = 3 + 0 \times i$. Le nombre $3 + 2i$ est un nombre complexe non réel. Sa partie imaginaire est 2 et sa partie réelle est 3..

Remarque :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

2 Opérations sur les nombres complexes

Définition :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a'i + b'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' réels.

- On définit l'opposé de z et on note $-z$ le nombre $-z = -a - ib$.
- On définit l'addition des nombres complexes z et z' et on note $z + z'$ le nombre :
$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$
- On définit la multiplication des nombres complexes z et z' et on note zz' le nombre :
$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$
- Tout nombre complexe non nul z admet un inverse, c'est à dire un nombre z' tel que $zz' = 1$, noté $z' = \frac{1}{z}$.

Remarque :
L'addition et la multiplication dans les complexes prolongent l'addition et la multiplication dans les réels car, si z et z' sont réels, c'est $z = a$ et $z' = a'$ avec a et a' réels, alors $z + z' = a + a'$ et $zz' = aa'$.

Exemples :

- $(3 + 2i) + (5 - 4i) = 8 - 2i$

- $(3+2i)(5-4i) = 3\times5+(2i)(-4i)+5\times2i-3\times4i = 15+8+10i-12i = 23-2i$
- $\frac{3+2i}{5-4i} = \frac{(3+2i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)} = \frac{15+10i+12i-8}{5^2-20i+20i+16} = \frac{7+22i}{41}$ (on a multiplié par $5 + 4i$ appelé *conjugué* de $5 - 4i$ pour obtenir un dénominateur réel et donc la forme algébrique du quotient).

Propriétés :
Pour tous les nombres complexes z et z',

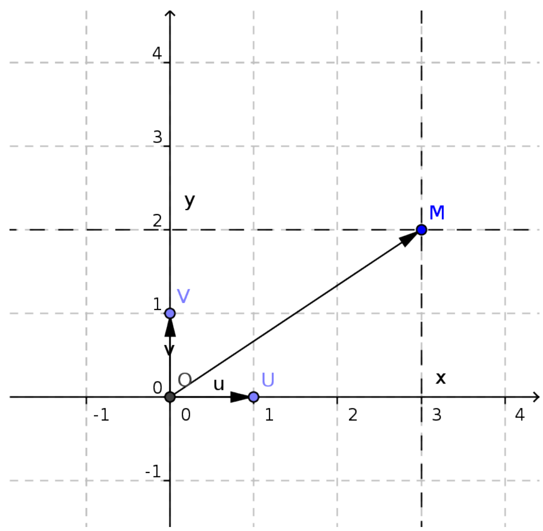
- $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$
- $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$
- $(z - z')(z + z') = z^2 - z'^2$
- $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

3 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition :

Soit $(O;\vec{u};\vec{v})$ un repère orthonormé du plan.

- Á tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b réels, on associe le point M de coordonnées $(a;b)$. On dit que M est *le point image de z* et que $\vec{OM}$ est *le vecteur image de z*.
- Tout point M de coordonnées $(x;y)$ est le point image d'un unique complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe du point M et du vecteur $\vec{OM}$.



Remarques :

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses qui est pour cette raison aussi appelé *axe réel*.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées qui est pour cette raison aussi appelé *axe imaginaire pur*.

Propriétés :

On considère deux points A et B du plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives z_A et z_B, alors

- le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.

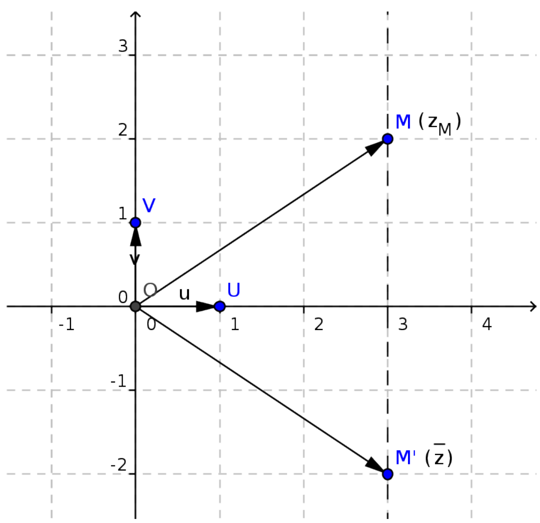
Preuve :

- A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et par ailleurs, $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$. Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et donc pour affixe $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$ dans ce repère.
  Or $z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$.
- On sait que $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$ et $z_I = x_I + iy_I$.
  Or $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{x_A + iy_A + x_B + iy_B}{2} = \frac{x_B + x_A + i(y_A + y_B)}{2}$.

4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition :
Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$ avec a et b réels, on appelle *conjugué de z* le nombre noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$.

Remarque :
Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.



Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

- z est réel si et seulement $\bar{z} = z$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$;
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$;
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$;
- pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$;
- si $z \neq 0$, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$;
- si $z \neq 0$, $\overline{\frac{z'}{z}} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$;

Preuve :

- Soit $z = a + ib$ avec a et b réels. $z = \bar{z}$ s'écrit $a + ib = a - ib$ c'est à $ib = -ib$ ou encore $2ib = 0$ ce qui équivaut à $b = 0$ c'est à dire $z = a$ réel.
- Soit $z = a + ib$ avec a et b réels. $\bar{z} = -z$ équivaut à $a - ib = -(a + ib)$ c'est à dire $a - ib = -a - ib$ ce qui équivaut à $2a = 0$ donc à $a = 0$.
- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. $\bar{z} + z' = a - ib + a' - ib' = a + a' - i(b + b') = \overline{z + z'}$.
- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. D'une part, $\overline{zz'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{aa' - bb' + iba' + ib'a} = aa' - bb' - i(ba' + b'a)$ et d'autre part, $\bar{z}\bar{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - ia'b - iab' = aa' - bb - i(ba' + b'a)$ d'où l'égalité.
- Vrai pour $n = 0$ car $z^0 = 1$. Si l'égalité $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ est vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$, alors pour $n + 1$, on a $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z}$. D'après la propriété précédente (qui n'est autre que le cas $n = 2$...), on peut écrire que $\overline{z^{n+1}} = \bar{z^n}\bar{z}$. Or, par hypothèse de récurrence, on a $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ donc $\overline{z^{n+1}} = (\bar{z})^n\bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$ et par récurrence, on en déduit qu'elle est vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}^*$
- Soit $z = a + ib$, alors $\overline{\frac{1}{z}} = \overline{\frac{1}{a+ib}} = \overline{\frac{a-ib}{a^2+b^2}}$ en multipliant par $a - ib$ le dénominateur et le numérateur. Ceci est encore égal à $\frac{a+ib}{a^2+b^2}$.
  Par ailleurs, $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$ en multipliant numérateur et dénominateur par $a + ib$. D'où l'égalité.
- $\overline{\frac{z'}{z}} = \overline{z'\frac{1}{z}} = \bar{z'}\overline{\frac{1}{z}} = \bar{z'}\frac{1}{\bar{z'}} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$.

5 Équations du second degré à coefficients réels

Théorème :

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution réelle $-\frac{b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Preuve (troisième cas) :

Dans tous les cas, $az^2 + bz + c = a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = a((z - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = a((z - (-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$ est l'écriture canonique de $az^2 + bz + c$.
L'équation s'écrit donc $(z - (-\frac{b}{2a}))^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$.
Si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$ donc $\sqrt{-\Delta}$ existe et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = -(-\Delta) = \Delta$ donc $i\sqrt{-\Delta}$ a pour carré Δ.
Par conséquent, $z - (-\frac{b}{2a}) = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z - (-\frac{b}{2a}) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ donc $z = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

6 Module d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = ai + b$ avec a et b réels un nombre complexe. On appelle *module de z* le nombre noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, si M est l'image de z, alors $OM = |z|$.

Remarque :

Si x est un nombre réel, alors le module de x et la valeur absolue de x sont égaux, d'où l'utilisation de la même notation.

Exemple :

Si $z = -3 + \sqrt{3}i$ alors $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$.

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z' :

- $|\bar{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$
- $|zz'| = |z||z'|$;
- pour tout entier naturel n non nul, $|z^n| = [z|^n$;
- $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$;
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Preuve :

- Évident.
- Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels.

  D'une part, on a $zz' = aa' - bb' + i(a'b + ab')$ donc $|zz'|^2 = (aa' - bb')^2 + (a'b + ab')^2$ d'où $|zz'|^2 = a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 + a'^2b^2 + 2aa'bb' + a^2b'^2 = a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2$.

  D'autre part, on a $|z|^2 = a^2 + b^2$ et $|z'|^2 = a'^2 + b'^2$ donc $(|z||z'|)^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = aa'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 + a^2b'^2$.

  D'où l'égalité $|zz'|^2 = (|z||z'|)^2$ et l'égalité voulue.
- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

  Initialisation : pour $n = 1$, $|z^1| = |z| = |z|^1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Hérédité : si pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z^n z| = |z^n||z|$ d'après la propriété précédente. Puisque par hypothèse de récurrence, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}$. C'est la propriété au rang $n + 1$.

  Conclusion : Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraie, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$.
- Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' des réels.

  D'une part $\frac{z}{z'} = \frac{a+ib}{a'+ib'} = \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'+ib')} = \frac{aa'+bb'+i(ba'-ab')}{a'^2+b'^2}$ d'où $|\frac{z}{z'}|^2 = (\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2})^2 + (\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2})^2 = \frac{a^2a'^2+b^2b'^2+b^2a'^2+a^2b'^2}{(a'^2+b'^2)^2} = \frac{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}{(a'^2+b'^2)^2} = \frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2}$.

  D'autre part, $(\frac{|z|}{|z'|})2 = \frac{(a^2+b^2)}{(a'^2+b'^2)}$.

  D'où l'égalité.
- $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Propriétés :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :

- $AB = |z_B - z_A|$;
- L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Preuve :

- Soit M tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$. M a pour affixe $z_B - z_A$ et $OM = |z| = |z_B - z_A|$.
- $|z - z_A| = |z - z_B|$ se traduit par $AM = BM$ c'est à dire que M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.