Nombres complexes, formes trigonométrique et exponentielle, Terminale S

F.Gaudon

22 mai 2017

Table des matières

1 Module et argument d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = ai + b$ avec a et b réels un nombre complexe. On appelle *module de z* le nombre noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, si M est l'image de z, alors $OM = |z|$.

Remarques :

- Si x est un nombre réel, alors le module de x et la valeur absolue de x sont égaux, d'où l'utilisation de la même notation.
- $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Exemple :

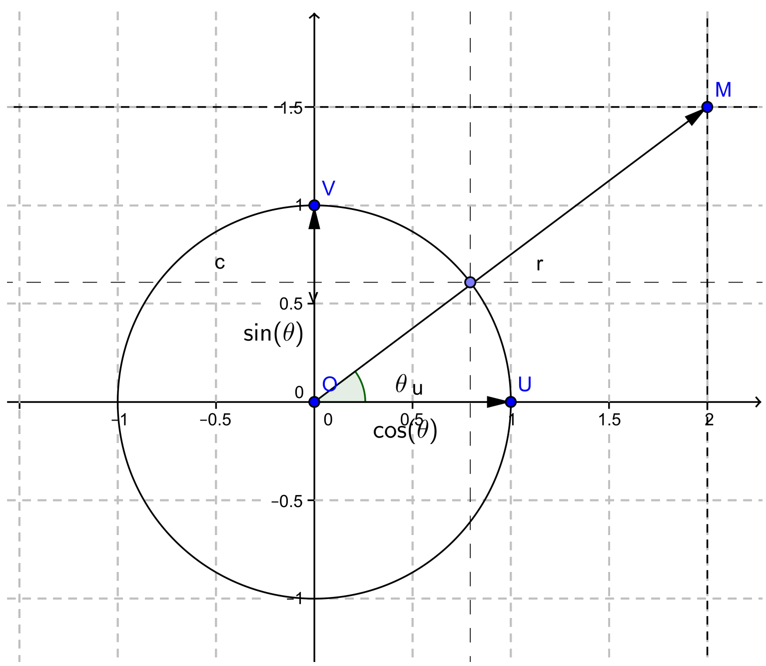
Si $z = -3 + \sqrt{3}i$ alors $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$.

Définition :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul d'image M on appelle *argument de z* et on note $\arg(z)$ tout mesure en radians de l'angle orienté :

$$(\vec{u}; \vec{OM})$$

Si θ est une mesure de cet angle orienté, on note $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$ ou plus simplement $\arg(z) = \theta$.



Propriété et définition :

Soit z un nombre complexe non nul.
- l'écriture $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ est appelé *forme trigonométrique de z*.
- Réciproquement, si $z = \rho(\cos(\alpha)) + i\sin(\alpha))$ avec $\rho > 0$ alors $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \alpha$.
- Si $z = x + iy$ alors
$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}$$
et
$$\sin\theta = \frac{y}{|z|}$$

Propriétés :

Pour tout nombre complexe z non nul :
- $\arg\bar{z} = -\arg z$;
- z est réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0\,(2\pi)$ ou $\arg z = \pi\,(2\pi) \Leftrightarrow \arg z = 0\,(\pi)$;
- z est imaginaire $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ ou $\arg z = -\frac{\pi}{2}\,(2\pi) \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2}\,(\pi)$.

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z' :
- $|zz'| = |z||z'|$;
- pour tout entier naturel n, $|z^n| = [z|^n$;
- $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$;

Pour tous les nombres complexes z et z' non nuls :
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,(2\pi)$;
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\,(2\pi)$ pour tout entier naturel n non nul ;
- $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\,(2\pi)$.

Preuve :
- Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.
  Alors $zz' = rr'(\cos\theta\cos\alpha + i\sin\theta\cos\alpha + i\sin\alpha\cos\theta - \sin\theta\sin\alpha)$
  c'est à dire $zz' = rr'(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha))$ donc $|zz'| = rr'$ et $\arg(zz') = \theta + \alpha$.
- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
  Initialisation : pour $n = 1$, $|z^1| = |z| = |z|^1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Hérédité : si pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z^n z| = |z^n||z|$ d'après la propriété précédente. Puisque par hypothèse de récurrence, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}$. C'est la propriété au rang $n+1$ Conclusion : Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraie, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$.

- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
  Initialisation : pour $n = 1$, $\arg(z^1) = \arg(z) = \arg(z)^1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.
  Hérédité : Si pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z^n) = n\arg(z)$, alors $\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n z) = \arg(z^n) + \arg(z)$ d'après la première propriété. Puisque par hypothèse de récurrence, $\arg(z^n) = n\arg(z)$ donc $\arg(z^{n+1}) = n\arg(z) + \arg(z) = (n+1)\arg(z)$: c'est la propriété au rang $n+1$.
  Conclusion, puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z^n) = n\arg(z)$.
- En remarquant que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ et en utilisant la première propriété, on en déduit qu'il suffit de montrer que $\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg z'$.
  Or $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))} = \frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{r'(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))(\cos(\alpha)-i\sin(\alpha))}$
  D'où $\frac{1}{z'} = \frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{r'(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha))} = \frac{1}{r'}(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)) = \frac{1}{r'}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$
  D'où $\frac{1}{z'}$ a pour module $\frac{1}{r'}$ et pour argument $-\alpha$ c'est à dire $-\arg z'$.

Propriétés :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soient A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors :
- $AB = |z_B - z_A|$;
- $(\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.
- Si C et D sont deux autres points d'affixes respectives z_C et z_D, $\arg\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\vec{AB}; \vec{CD})$.

Preuve :
- Soit M le point tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$. On a donc $z_M - z_O = z_B - zA$ donc $z_M = z_B - z_A$ et $AB = OM = |z_M| = |z_B - z_A|$.
- En outre $(\vec{u}; \vec{AB}) = (\vec{u}; \vec{OM}) = \arg(z_M)\,(2\pi) = \arg(z_B - z_A)\,(2\pi)$.
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \vec{CD}) - (\vec{u}; \vec{AB}) = (\vec{u}; \vec{CD}) + (\vec{AB}; \vec{u}) = (\vec{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \vec{CD}) = (\vec{AB}; \vec{CD})\,(2\pi)$.

2 Notation exponentielle

Définition et propriété :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

- Pour tous les réels θ et θ', on a $f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$.
- On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est définie par : $f'(\theta) = \cos'(\theta) + i\sin'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$
- On a $f'(\theta) = if(\theta)$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = i$.

Preuve :
Seul le premier point n'est pas immédiat. D'une part,

$$\begin{aligned} f(\theta+\theta') &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

Définition :

D'après ce qui précède, par analogie avec la fonction exponentielle, on pose pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Soit z un nombre complexe non nul. L'écriture $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et θ est un argument de z est appelée *forme exponentielle* de z.

Propriétés :

Pour tous les réels θ et θ' et tout entier naturel n non nul :

- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta$;
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Preuve :

- $|e^{i\theta}| = |\cos(\theta)+i\sin(\theta)|$ par définition. Par ailleurs, $|\cos(\theta)+i\sin(\theta)|^2 = (\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2 = 1$.
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = f(\theta)f(\theta') = f(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}$
- $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta-i\theta} = e^0 = 1$ donc $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}\frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}e^{-i\theta'}$
- $\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ et $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ d'où l'égalité.
- On le montre par récurrence en utilisant le deuxième point.