Limites de suites, cours, terminale S

F.Gaudon

3 novembre 2018

Table des matières

1 Convergence de suites

Définition :

Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) *converge vers un réel* l ou *a pour limite* l lorsque tout intervalle ouvert A contenant l, contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N c'est à dire que pour tout $n \geq N$, $u_n \in A$.
On dit alors que la suite est convergente et que l est sa limite. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ou $lim_n u_n = l$.

Propriété :

Si (u_n) converge vers une limite l, alors celle-ci est unique.

Preuve :
Procédons par l'absurde. Supposons que (u_n) converge vers une limite l et soit l' un réel différent de l. On supposera ici que $l' < l$, le cas $l' > l$ se traitant de la même manière. Il existe donc un nombre réel e positif tel que $l' + e < l - e$. Comme (u_n) converge vers l, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]l - e; l + e[$. Comme (u_n) converge vers l', à partir d'un certain rang N', tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]l' - e; l' + e[$. Donc, à partir du plus grand rang entre N et N', tous les termes de la suite devraient être dans les deux intervalles $]l - e; l + e[$ et $l' - e; l' + e[$ ce qui est impossible car ils sont disjoints. Donc la supposition faite en début de preuve était fausse, c'est à dire que $l = l'$.

Algorithmique :
Soit (u_n) suite (u_n) définie à partir d'un rang p par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq p$ et convergente vers une limite l. L'algorithme suivant donne le rang n du premier terme de la suite situé à une distance inférieure à un réel positif e de la limite l :

```
Données : p, u_p, l, e
Début traitement
    u ← u_p ;
    n ← p ;
    tant que |u − l| ≥ e faire
        u ← f(u) ;
        n ← n + 1
    fin
    Afficher n
Fin
```

Exemple :
Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 0,75$ n. p désigne le premier rang de la suite (1 ici) puis les termes successifs. On admettra que la suite (u_n) converge vers 0 ; on a donc $l = 0$ ici. e (ou er sous Xcas où e est une constante fixée) désigne la différence entre les termes et la limite qui doit être obtenue.

TI :	**Casio :**	**XCas :**

Prompt P,U,E, L
While $abs(U-L) > E$
$P+1 \triangleright P$
$U^2 \triangleright U$
End
Disp "P=",P
	"P" :?→ P
	"U" :?→ U
	"L" :?→ L
	"E" :?→ E
	While $Abs(U-L) > E$
	$P+1 \to P$
	$U^2 \to U$
	WhileEnd
	"P" :P◢
		`saisir("Premier rang p :",p);`
		`saisir("Premier terme u_p :",u);`
		`saisir("Limite :",l);`
		`saisir("Différence limite :",err);`
		`tantque abs(u-k)>err faire`
		`u:=u^2;`
		`fpour;`
		`afficher("Rang obtenu : ",u);`

2 Convergence de suites de référence

Propriété (limites finies de suites de référence) :

Les suites $(\frac{1}{n})$, $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ et $(\frac{1}{n^p})$ où p est un entier naturel non nul sont convergentes et on a :

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

Preuve :

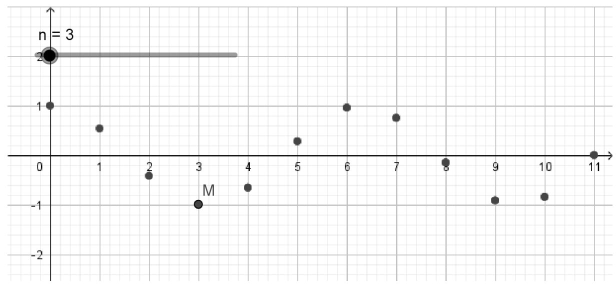
- On considère un intervalle ouvert contenant 0. soit a un réel positif strictement tel que $]-a;a[$ soit inclus dans cet intervalle. Alors il existe un nombre entier N tel que $\frac{1}{N} < a$. Comme $(\frac{1}{n})$ est strictement décroissante et positive, pour tout rang $n > N$, on a $-a < \frac{1}{n} < a$ donc $\frac{1}{n}$ qui appartient à l'intervalle. Par conséquent, la suite converge vers 0.
- On considère un intervalle ouvert contenant 0. Soit a un réel positif strictement tel que $]-a;a[$ soit inclus dans cet intervalle. On cherche un entier N tel que $\frac{1}{\sqrt{N}} \leq a$ ce qui équivaut à $\sqrt{N} \geq \frac{1}{a}$ donc à $N \geq \frac{1}{a^2}$. Soit donc N tel que $N \geq \frac{1}{a^2}$, le calcul précédent montre que $\frac{1}{\sqrt{N}} \leq a$ et, la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ étant décroissante et positive, pour tout $n \geq N$, $-a < \frac{1}{\sqrt{n}} < a$. Ceci prouve que la suite a pour limite 0.
- Démarche identique aux précédentes.

3 Divergence de suites

Définition :

- On dit qu'une suite est *divergente* si elle ne converge pas.
- On dit que la suite (u_n) *diverge vers* $+\infty$ ou *a pour limite* $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque tout intervalle de la forme $[a;+\infty[$ où a est un réel (resp. $]-\infty;a]$), contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)

Remarque :
Une suite peut être divergente et ne pas admettre de limite, par exemple $(sin(n))$.



Propriété (limites infinies de suites de référence) :

On a :
- $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$;
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$;
- $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ avec p entier naturel non nul ;
- Pour tous les réels m et p, $\lim_{n\to+\infty} mx + p = signe(m)\infty$;

Preuve :
- Pour tout intervalle $]a; +\infty[$, soit N entier naturel tel que $N > a$, alors pour tout rang n tel que $n \geq N$, n est dans l'intervalle $]a; +\infty[$ donc la suite diverge vers $+\infty$.
- Pour tout intervalle $]a; +\infty[$, On cherche N entier naturel tel que $\sqrt{N} > a$ c'est à dire $N > a^2$. Soit donc N tel que $N > a^2$. Alors $\sqrt{N} > a$ et pour tout rang $n \leq N$, on a $\sqrt{n} > a$ donc la suite $(\sqrt{n})$ est divergente vers $+\infty$.
- Même démarche.

4 Opérations sur les limites de suites

Propriété :

Soit (u_n) une suite.
- si k est un réel et si (u_n) converge vers un réel l, alors la suite (ku_n) est convergente vers kl ;
- si k est un réel et (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors ku_n diverge vers $signe(k)\infty$ (resp $-signe(k)\infty$) ;

Preuve :
Si $k = 0$ le résultat est évident. On supposera en outre que $k > 0$, la démarche étant identique pour $k < 0$.
- Soit A un intervalle ouvert contenant kl. Il existe donc un réel $a > 0$ tel que $]kl - a; kl + a[$ est inclus dans A. Comme (u_n) est convergente vers l, il existe un rang N tel que pour tout rang $n \geq N$, $u_n \in]l - \frac{a}{k}; l + \frac{a}{k}[$ qui est un intervalle ouvert contenant kl. D'où pour tout $n \geq N$, $ku_n \in]kl - a; kl + a[$ ce qui assure que la suite converge vers kl.

- Soit $a > 0$ un réel. Alors, puisque (u_n) diverge vers $+\infty$, il existe un rang N tel que pour tous les rangs $n \geq N$, $u_n > \frac{a}{k}$. D'où pour tout $n \geq N$, $ku_n > a$.

Propriété :

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	l	l
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$	$l + l'$	$+\infty$	indéterminée	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim u_n \times v_n$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	signe$(l)\infty$, $l \neq 0$	-signe$(l)\infty$, $l \neq 0$
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	si $l' \neq 0$, $\frac{l}{l'}$	indéterminée	indéterminée	indéterminée	0	0

Preuves :
Admises

Exemples :
- Soit u_n définie par $u_n = \frac{3n^4+n}{n^3}$ pour tout $n \geq 1$. On a alors $u_n = 3n + \frac{1}{n}$. Comme $lim_{n \to +\infty} = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, la suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$.
- Soit v_n définie par $v_n = 5n^2 - 6n$ pour tout $n \geq 0$. On a alors $v_n = n(5n-6)$. Or $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} 5n - 6 = +\infty$ donc (v_n) diverge vers $+\infty$.

5 Inégalités et limites de suites

Propriété, théorème de comparaison des limites ⊙ :

- Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$ et (v_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang $v_n \geq u_n$. Alors (v_n) est divergente vers $+\infty$.
- Soit (u_n) une suite divergente vers $-\infty$ et (v_n) une suite telle qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$. Alors (v_n) diverge vers $-\infty$.

Preuve :
On considère un intervalle de la forme $]a; +\infty[$ où a est un réel. (u_n) diverge vers $+\infty$ donc à partir d'un certain rang N les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]a; +\infty[$. A partir d'un certain rang N', $v_n \geq u_n$ donc à partir du plus grand des rang N et N', les termes de la suite (v_n) sont dans $]a; +\infty[$ ce qui démontre que la suite (v_n) est divergente vers $+\infty$.

Théorème dit « théorème des gendarmes » :

Soient u, v et w des suites avec v et w convergentes vers une même limite l. Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$, alors la suite u est convergente vers l.

Preuve :
On considère un intervalle ouvert contenant l. Il existe donc un nombre réel e strictement positif tel sue $]l-e;l+e[$ est inclus dans cet intervalle. La suite (v_n) converge vers l donc à partir d'un certain rang N, v_n est supérieur à $l-e$. La suite (w_n) est convergente donc à partir à partir d'un certain rang N', $w_n < l+e$. En outre, à partir d'un certain rang N'', on a $v_n \leq u_n \leq w_n$, donc à partir du plus grand des trois rangs N, N' et N'', on a $u_n \geq v_n > l-e$ et $u_n \leq w_n < l+e$ donc w_n est dans l'intervalle considéré. Ceci montre que la suite converge vers l.

Théorème :

Soit (u_n) une suite croissante et convergente vers un réel l. Alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à l.

Preuve :
Démontrons ce résultat par l'absurde. Pour cela, on suppose qu'il existe un terme de la suite, appelons le (u_N), qui est supérieur strictement à l. Soit $d = u_N - l$. On a donc $d > 0$.
On considère l'intervalle $]l-d;l+d[$. u_N n'appartient donc pas à cet intervalle. (u_n) étant une suite croissante, pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n > u_N > l+d$ et donc $u_n \notin]l-d;l+d[$.
On vient donc de trouver un intervalle pour lequel quelque soit le rang p choisi, il existe des termes de la suite plus grand que p (les termes de rang n supérieur au maximum de p et N) qui n'appartiennent pas à cet intervalle : cela contredit la définition de la convergence de la suite vers l.
Cette contradiction montre que la supposition faite au départ est absurde, on ne peut donc pas trouver de terme de la suite qui soit supérieur strictement à l. D'où le résultat.

6 Convergence des suites monotones

Théorème de la limite monotone :

Toute suite monotone et bornée est convergente.

Preuve :
Admise

conséquence :

Soit (u_n) une suite croissante.
- Si (u_n) n'est pas majorée alors elle est divergente vers $+\infty$.
- Si (u_n) est majorée, alors elle est convergente.

Preuve :

- Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Soit a un réel. Il s'agit de montrer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]a:+\infty[$.
  La suite n'est pas majorée par a donc il existe un rang N tel que u_N soit supérieure strictement à a, c'est à dire $u_N \in]a;+\infty[$. Puisque la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > a$ donc $u_n \in]a;+\infty[$.
  Cela signifie que la suite admet pour limite $+\infty$.
- Comme (u_n) est croissante, elle est minorée par son premier terme. Comme est aussi majorée, elle est bornée. Par le théorème de la limite monotone, on en déduit qu'elle est convergente.

7 Limite de suites géométriques

Propriété (limite des suites géométriques)$\odot$:

Soit q un réel. Alors :
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) a pour limite $+\infty$;
- si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) a pour limite 0 ;
- si $q < -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Preuve :

- Si $q > 1$ alors $q = 1+x$ avec $x > 0$. Considérons la fonction h définie par $h(x) = (1+x)^n-(1+nx)$.
  La fonction h est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et $h'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n((1+x)^n - 1$.
  Pour tout $x \geq 0$, on a $h'(x) \geq 0$ donc h est croissante et de $h(0) = 0$ on déduit $(1+x)^n-(1+nx) \geq 0$ donc $(1+x)^n \geq 1+nx$.
  Puisque $\lim_{n\to+\infty}(1+nx) = +\infty$, on a donc $q^n = (1+x)^n$ qui tend vers $+\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $|q| < 1$ donc $\frac{1}{|q|} > 1$ et d'après le cas précédent $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|q|^n} = +\infty$ d'où $(|q|^n)$ tend vers 0.
  Par suite, $|q|^n = q^n$ si $q > 0$ ou si n est pair et $|q|^n = -q^n$ sinon, d'où $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$ et par le théorème des gendarmes (q^n) tend vers 0.
- Si $q = -1$, la suite des termes impaires est dans $]-\infty;-1[$ et la suite des termes paires est dans $[1+\infty[$ donc la suite (q^n) ne peut pas converger.