Probabilités conditionnelles, cours, terminale S

F.Gaudon

24 octobre 2016

Table des matières

1 Notion de probabilité conditionnelle

Définition :

Pour tout événement A non impossible et tout événement B, on appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* et notée $P_A(B)$ le nombre

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A}$$

Exemple :

Lors d'un sondage, 50% personnes des interrogées déclarent pratiquer un sport régulièrement et 75% des personnes interrogées déclarent aller au cinéma régulièrement. De plus, 40% des personnes déclarent faire du sport et aller au cinéma régulièrement. On interroge à nouveau une de ces personnes au hasard et on considère les événements « la personne interrogée pratique un sport régulièrement » et « la personne interrogée va au cinéma régulièrement » que l'on notent S et C respectivement. On cherche à calculer la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma.

On a $P(C) = 0,75$ et $P(S \cap C) = 0,4$. Donc $P_C(S) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{0,4}{0,75} \approx 0,53$.

Propriété :

Soient A et B deux événements non impossibles d'un univers donné. La connaissance de la probabilité d'un événement B et de la probabilité conditionnelle d'un événements A sachant B permet de retrouver la probabilité $P(A \cap B)$ de l'intersection de A et B avec la formule

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

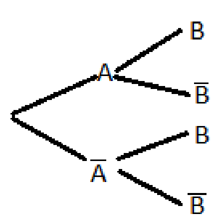
.

Propriétés :

Pour tous les événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(A) = 1$;
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$;
- Si A et B sont des événements incompatibles (c'est à dire ne pouvant pas se réaliser simultanément ou encore tels que $A \cap B = \emptyset$) alors $P_A(B) = 0$.

2 Arbre pondérés



Définition :

Le schéma ci-dessus est appelé *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités*. Il comporte 4 *chemins* : $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$. Un *noeud* est un point d'où partent plusieurs branches.

Propriété :

Dans un *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités* comme ci-dessus,

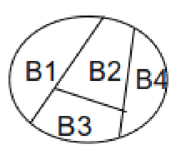
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 (par exemple, $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$) ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches (par exemple, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$) ;

3 Partitions et formule des probabilités totale

Définition :

Soient A_1, A_2, ..., A_n pour $n \geq 1$ des parties non vides d'un ensemble E. On dit que A_1, A_2, ..., A_n forment *une partition* de E si les deux conditions suivantes sont vérfiées

- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$;
- pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et tout $j \in \{1; 2; ...; n\}$ avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.



Formule des probabilités totales :

Si A_1, A_2, ..., A_n forment une partition d'un univers E, alors pour tout événement A de l'univers E :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$$

ou encore

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P_(A_2)P_{A_2}(B) + ... + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

En particulier, pour tout événement B,

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

Remarque :
Sur l'arbre pondéré du paragraphe précédent, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le compose (par exemple, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$).

4 Indépendance d'événements

Définition :

On dit que deux événements A et B sont *indépendants* lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarque :
Si $P(A) \neq 0$ alors deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ avec $P(B) \neq 0$, ce qui signifie que la probabilité que l'un des deux événements se réalise ne dépend pas de la probabilité que l'autre se réalise.

Exemple :
On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On appelle A l'événement « on tire un as », T l'événement « on tire un trêfle » et N l'événement « on tire une carte noire ». On a $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(N) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

D'une part $A \cap T$ est l'événement « on tire l'as de trêfle » et $P(A)P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$ qui est bien égal à $P(A \cap T)$ ce qui montre que A et T sont indépendants.

D'autre part, $T \cap N$ est l'événement « on tire un trêfle et une carte noire » dont la probabilité est $\frac{1}{4}$ mais on a $P(T)P(N) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq P(T \cap N)$ ce qui confirme que les événements T et N ne sont évidemment pas indépendants.

Propriété ⊙ :

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Preuve :

Si A et B sont indépendants dans un univers E alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. $\bar{A}$ et B sont indépendants si et seulement si $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B)$. Or $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$ d'après la formule des probabilités totales. D'où $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B)$ par indépendance de A et B. Donc $P(\bar{A} \cap B) = (1 - P(A))P(B) = P(\bar{A})P(B)$. D'où l'indépendance de $\bar{A}$ et B.