Lois de probabilités continues, cours, terminale S

1 Généralités sur les lois de probabilités continues

Notation :

On considère un univers I de la forme $[a;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$ ou de la forme $[a;+\infty[$ avec a réel. On notera :
- $\int_I f(t)dt = \int_a^b f(x)dt$ dans le premier cas ;
- $\int_I f(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ dans le deuxième cas.

Définition :

Avec les notations précédentes :
- On appelle *densité de probabilité* sur I, toute fonction f continue et .... telle que
$$\int_I f(t)dt = ...$$
- On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans I suit une loi de probabilité de densité f sur I si pour tout intervalle J inclus dans I :
$$P(X \in J) = ...t$$

Une telle variable aléatoire est dite .... sur I.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité continue de densité f sur I.
- $P(X \in I) = ...$;
- Pour tout réel x, $P(X = x) = \int_x^x f(t)dt = ...$;
- $P(X \in [a;b]) = P(X \in ..a;b..) = P(X \in ..a;b..) = P(X \in ..a;b..)$ et $P(X \leq a)) = P(X...a)$ pour tous les réels a et b avec $a < b$.

Notation :
On note $P(a \leq X \leq b) = P(X \in [a;b])$.

2 Loi uniforme

Propriété et définition :

Soit $[a;b]$ un intervalle avec a et b réels. On appelle *loi uniforme* sur $[a;b]$, la loi de probabilité dont la densité f est :

$$f(x) = \dots\dots\dots\dots$$

pour tout réel $x \in [a;b]$.

Preuve :
On a $f \geq \dots.$ et on vérifie que $\int_a^b f(t)dt = \dots..$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$. Alors l'espérance $E(X)$ de X est :

$$E(X) = \int_a^b tf(t)dt = \dots\dots\dots\dots$$

Exemple :
La fonction `Alea()` du tableur donne des valeurs suivants la loi uniforme sur $[0;1]$.

3 Loi exponentielle

Définition et propriété :

Soit λ un réel strictement positif. On appelle *loi exponentielle* de paramètre λ la loi de probabilité dont la densité f est définie par :

$$f(t) = ...$$

pour tout réel $t \in [0; +\infty[$.

Preuve :
On a $f \geq ...$ et $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(t)dt = ...$

Propriété :

Si X est une loi de probabilité suivant une loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tout réel b, $P(X \leq b) = ...$

Preuve :
$P(X \leq b) = P(... \leq X \leq ...) = \int_{...}^{...} ....dt = [.................]_{...}^{...} = ...$

Propriété :

Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tous les réels positifs t et h :

$$P_{X\geq t}(X \geq t + h) = ...$$

Preuve :
$P_{X\geq t}(X \geq t + h) = \frac{P(..............\cap..............)}{P(...............)} = \frac{P(X\geq.......)}{P(X\geq......)} = \frac{1-P(X<......)}{1-P(X<.....)} = ...$

Propriété :

L'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ est

$$E(X) = ...$$

Preuve $\odot$:
Soit g la fonction définie par $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$.
On cherche une primitive G de g de la forme $G(t) =$ .... avec a et b réels à déterminer.
On a $G'(t) =$ ....
$G'(t) = g(t)$ pour .... et .... c'est à dire .... et .... d'où $G(t) =$ ....
On a donc $\int_0^b g(t)dt = G(b) - G(0)$.
Or $G(0) = -\frac{1}{\lambda}$ et $G(b) =$ ....
Comme $\lim_{b\to+\infty} be^{-\lambda b} = ...$ et $\lim_{b\to+\infty} e^{-\lambda b} = ...$ on a donc $\lim_{b\to+\infty} G(b) - G(0) = \frac{1}{\lambda}$