# Lois de probabilités continues, cours, terminale S

F.Gaudon

16 avril 2014

## Table des matières

# 1 Généralités sur les lois de probabilités continues

**Notation :**

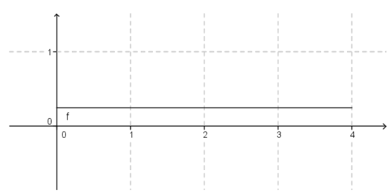
On considère un univers $I$ de la forme $[a;b]$ où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$ ou de la forme $[a;+\infty[$ avec $a$ réel. On notera :
- $\int_I f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$ dans le premier cas ;
- $\int_I f(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ dans le deuxième cas.

**Définition :**

Avec les notations précédentes :
- On appelle *densité de probabilité* sur $I$, toute fonction $f$ continue et positive telle que
$$\int_I f(t)dt = 1$$
- On dit qu'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $I$ suit une loi de probabilité de densité $f$ sur $I$ si pour tout intervalle $J$ inclus dans I :
$$P(X \in J) = \int_J f(t)dt$$

Une telle variable aléatoire est dite continue sur $I$.

**Exemple :**
Soit $f$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}$ sur $[0;4]$.




$f$ est continue et positive sur $[0;4]$. $\int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{4} \times 4 = 1$.
$f$ est donc la densité de probabilité d'une variable aléatoire $X$ qui vérifie $P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{x}{4}$.

**Propriété :**

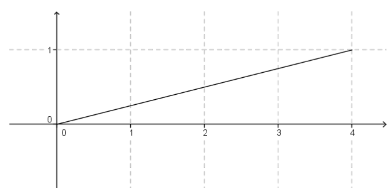
Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de probabilité continue de densité $f$ sur $I$.
- $P(X \in I) = 1$ ;
- Pour tout réel $x$, $P(X = x) = \int_x^x f(t)dt = 0$ ;
- $P(X \in [a;b]) = P(X \in ]a;b]) = P(X \in [a;b[) = P(X \in ]a;b[)$ et $P(X \leq a)) = P(X < a)$ pour tous les réels $a$ et $b$ avec $a < b$.

**Notation :**
On note $P(a \leq X \leq b) = P(X \in [a;b])$.

**Définition :**

On appelle *espérance mathématique* d'une variable aléatoire continue $X$ de densité de probabilité $f$ définie sur un intervalle $J$ le réel noté $E(X)$ défini par
$$E(X) = \int_J tf(t)dt$$

**Exemple :**
Pour la variable aléatoire $X$ de l'exemple précédent, on a $E(X) = \int_0^4 \frac{t}{4}dt = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$.




## 2 Loi uniforme

**Propriété et définition :**

Soit $[a;b]$ un intervalle avec $a$ et $b$ réels. On appelle *loi uniforme* sur $[a;b]$ , la loi de probabilité dont la densité $f$ est :
$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$
pour tout réel $x \in [a;b]$.

**Preuve :**
On a $f \geq 0$ et on vérifie que $\int_a^b f(t)dt = 1$.

**Propriété :**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$. ALors l'espérance $E(X)$ de $X$ est :
$$E(X) = \int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2}$$

**Exemple :**
La fonction `Alea()` du tableur donne des valeurs suivants la loi uniforme sur $[0;1]$.

# 3 Loi exponentielle

**Définition et propriété :**

Soit $\lambda$ un réel strictement positif. On appelle *loi exponentielle* de paramètre $\lambda$ la loi de probabilité dont la densité $f$ est définie par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

pour tout réel $t \in [0; +\infty[$.

**Preuve :**
On a $f \geq 0$ et $\lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(t)dt = 1$.

**Propriété :**

Si $X$ est une loi de probabilité suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, alors pour tout réel $b$,

- $P(X \leq b) = P(X < b) = 1 - e^{-\lambda b}$ ;
- $P(X \geq b) = P(X > b) = e^{-\lambda b}$.

**Preuve :**
$P(X \leq b) = P(0 \leq X \leq b) = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda [\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}]_0^b = \frac{-\lambda}{\lambda}(e^{-\lambda b} - e^0) = 1 - e^{-\lambda b}$

**Propriété :**

Si $X$ est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, alors pour tous les réels positifs $t$ et $h$ :

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

**Preuve :**
$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{P((X \geq t+h) \cap (X \geq t))}{P(x \geq t)} = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq h)} = \frac{1 - P(X < t+h)}{1 - P(X < t)}$.
D'où $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{1-(1-e^{-\lambda(t+h)})}{1-(1-e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = 1 - P(X < h) = P(X \geq h)$

**Propriété :**

L'espérance d'une variable aléatoire $X$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ est

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

**Preuve ⊙ :**
Soit $g$ la fonction définie par $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$.
On cherche une primitive $G$ de $g$ de la forme $G(t) = (at+b)e^{-\lambda t}$.
On a $G'(t) = ae^{-\lambda t} - (at+b)\lambda e^{-\lambda t} = (a - \lambda b - at)e^{-\lambda t}$.
$G'(t) = g(t)$ pour $a - \lambda b = 0$ et $-a = \lambda$
c'est à dire $a = -\lambda$ et $b = \frac{-1}{\lambda}$
d'où $G(t) = (-t - \frac{1}{\lambda})e^{-\lambda t}$.
On a donc $\int_0^b g(t)dt = G(b) - G(0)$.
Or $G(0) = -\frac{1}{\lambda}$ et $G(b) = -be^{-\lambda b} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda b}$.
Comme $\lim_{b \to +\infty} be^{-\lambda b} = 0$ et $\lim_{b \to +\infty} e^{-\lambda b} = 0$ on a donc $\lim_{b \to +\infty} G(b) - G(0) = \frac{1}{\lambda}$