Lois normales, cours, terminale S

F.Gaudon

27 avril 2017

Table des matières

1 Loi normale centrée et réduite

Propriété et définition :

Une variable aléatoire X suit la loi *normale centrée réduite* notée $\mathcal{N}(0;1)$ si sa densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par

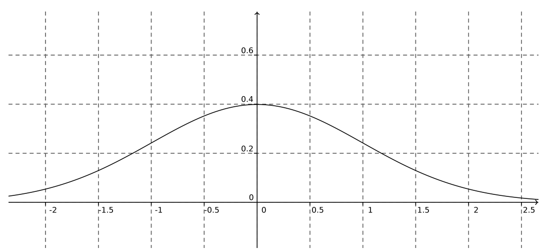
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

c'est à dire si pour tout réel x on a :

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Preuve :

La fonction f ci-dessus est positive et on admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.



Propriétés :

- f est continue sur $\mathbb{R}$;
- l'aire totale sous la courbe de f est égale à 1 ;
- f est dite *paire* : sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $P(X \leq 0) = \frac{1}{2}$ c'est à dire que l'aire sous la courbe de $[0; +\infty[$ est $\frac{1}{2}$;
- Pour tout réel x, $P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$.
- Pour tout réel x positif, $P(-x \leq X \leq x) = 2P(X \leq x) - 1$

Preuve :

- $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
- admis
- $f(-x) = f(x)$ pour tout réel $x \in]-\infty; \infty[$.
- Conséquence de la parité et du fait que l'aire totale vaut 1.
- $P(-x \leq X \leq x) = P(X \leq x) - P(X \leq -x) = P(X \leq x) - P(X \geq x)$ par symétrie de l'aire sous la courbe.
  Donc $P(-x \leq X \leq x) = P(X \leq x) - (1 - P(X \leq x)) = 2P(X \leq x) - 1$.

Propriété :

Si $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ alors $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

Preuve :
Admis

Utilisation de la calculatrice :
Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$:

- Sur Texas Instrument : Dans le menu $\boxed{\text{distrib}}$, sélectionner $\boxed{\text{NormalFrép}}$ puis taper $\boxed{a}\boxed{,}\boxed{b}\boxed{,}\boxed{\mu}\boxed{,}\boxed{\sigma}\boxed{)}$
- Sur Casio : Dans le menu $\boxed{\text{STAT}}$ choisir $\boxed{\text{DIST}}$ puis $\boxed{\text{NORM}}$ et $\boxed{\text{ncd}}$ puis compléter avec les paramètres a, b, μ et σ.

Exemple :
Soit $X \sim \mathcal{N}(0;1)$.

- Calcul de $P(X \geq 1,5)$: les calculatrices ne permettent de calculer que $P(a \leq X \leq b)$.
  On peut contourner ce problème de deux manières :
  - On peut remarquer que $P(X \geq 1,5) = 1 - P(X \leq 1,5)$ (événement contraire)
    puis que $P(X \geq 1,5) = 1 - (P(X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 1,5))$ en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées
    donc $P(X \geq 1,5) = 1 - 0,5 - P(0 \leq X \leq 1,5) \approx 0,0668$.
  - On entre une valeur « très grande » de b : $P(1,5 \leq X \leq 1000) \approx 0,0668$
- Calcul de $P(X < -1,5)$:
  on peut remarquer que $P(X < -1,5) = P(X < 0) - P(-1,5 \leq X \leq 0) = 0,5 - P(-1,5 \leq X \leq 0)$ en utilisant la symétrie ce qui permet d'utiliser une calculatrice.

Propriété :

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors pour tout $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Preuve ⊙ :
D'après la symétrie de la courbe, on a pour tout réel x positif, $P(-x \leq X \leq x) = 2P(0 \leq X \leq x) = 2\int_0^x f(u)du$.
On pose pour tout réel x positif, $H(x) = 2\int_0^x f(u)du$.
H est continue sur $\mathbb{R}$. H est aussi strictement croissante sur $]0;+\infty[$ car $H'(x) = 2f(x)$ pour tout réel x positif. On a $\lim_{x\to+\infty} H(x) = 1$ et $H(0) = 0$.
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ on a $1 - \alpha \in]0;1[$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel u_α strictement positif tel que $H(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Remarque :
En particulier on a $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.
Cela signifie que $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$ et $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$.
Cela veut aussi dire qu'environ 95% des réalisations se trouvent dans l'intervalle $[-1,96, 1,96]$ et 99% se trouvent dans l'intervalle $[-2,58; 2,58]$.

Utilisation de la calculatrice :

Pour calculer u tel que $P(X \leq u) \approx \alpha$ où α est donné.

- Sur Texas Instrument : Dans le menu $\boxed{\text{distrib}}$, sélectionner $\boxed{\text{FracNormale}}$ puis taper $\boxed{\alpha}\boxed{,}\boxed{\mu}\boxed{,}\boxed{\sigma}\boxed{)}$
- Sur Casio : dans le menu $\boxed{\text{STAT}}$ choisir $\boxed{\text{DIST}}$ puis $\boxed{\text{NORM}}$ et $\boxed{\text{InvN}}$ puis compléter « area » avec α et compléter les paramètres μ et σ.

Exemple :

$X \sim \mathcal{N}(0;1)$. On recherche u réel tel que $P(-u \leq X \leq u) = 0,99$.

- On exprime $P(-u \leq X \leq u)$ à l'aide de $P(X \leq u)$ pour pouvoir utiliser une calculatrice (les calculatrices Casio permettent le calcul direct de u avec l'option « tail » mise à $\boxed{\text{CNTR}}$ du menu $\boxed{\text{InvN}}$) :
  $P(-u \leq X \leq u) = P(X \leq u) - P(X < -u) = P(X \leq u) - (1 - P(X \geq -u))$
  donc $P(-u \leq X \leq u) = P(X \leq u) - 1 + P(X \geq -u) = P(X \leq u) - 1 + P(X \leq u) = 2P(X \leq u) - 1$.
- Avec une calculatrice, on cherche u tel que $2P(X \leq u) - 1 = 0,99$ c'est à dire tel que $P(X \leq u) = \frac{1,99}{2}$. On obtient bien $u \approx 2,58$.

2 Variables centrées et réduites

Propriété et définition :

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X) = m$, de variance $V(X)$ et d'écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Alors :
- La variable aléatoire $X - m$ a une espérance nulle : elle est dite *centrée* ;
- la variable aléatoire $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ a une espérance nulle et un écart type égal à 1 : elle est dite *centrée* et *réduite*.

Preuve :

On a $E(X - m) = E(X) - m$ par linéarité de l'espérance mathématique.
D'où $E(X - m) = E(X) - m = m - m = 0$ et $E(\frac{X-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}E(X - m) = 0$
Par ailleurs, $V(X - m) = V(X)$ et $V(\frac{X-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$.

Propriété :

Soient n un entier naturel et p un réel de $]0;1[$.Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Alors la variable aléatoire Z_n définie par $Z_n = \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ a pour espérance 0 et pour écart type 1.
La variable aléatoire Z_n est donc la variable centrée réduite associée à la variable X_n.

preuve :

On a $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$ donc on sait que $E(X_n) = np$ et $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$.
$E(Z_n) = E(\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = \frac{E(X_n)-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ par linéarité de l'espérance mathématique.
Donc $E(Z_n) = \frac{np-np}{\sqrt{np(1-p)}} = 0$.
En outre, $V(Z_n) = \frac{1}{np(1-p)}V(X_n - np)$ car $V(aX) = a^2V(X)$
et $V(Z_n) = \frac{1}{np(1-p)}V(X_n)$ car $V(X + b) = V(X)$.
D'où $V(Z_n) = \frac{1}{np(1-p)}np(1 - p) = 1$.

Théorème de De Moivre-Laplace :

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Soit $Z_n = \frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Alors pour tous les réels a et b tels que $a < b$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

c'est à dire que lorsque n devient « grand » Z_n suit approximativement une loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Preuve :

admis

Remarque :

En pratique, on utilise cette approximation dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$.

3 Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition :

> Soient μ et σ deux réels avec $\sigma > 0$. Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

Remarque :
La densité de probabilité d'une variable aléatoire qui suit $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ est représentée par une courbe « en cloche » dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \mu$.

Propriété :

> Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors son espérance est μ, sa variance est σ^2 et son écart type est σ.

Preuve :
Immédiat par changement de variable

Propriété :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ alors :
> - $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$
> - $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$
> - $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$