Nombres complexes, cours, Terminale S

F.Gaudon

18 décembre 2013

Table des matières

1 Notion de nombre complexe

On sait depuis les babyloniens résoudre les équations dites du second degré (c'est à dire de la forme $ax^2 + bx + c = 0$). Cependant, on est resté longtemps sans méthode générale de résolution des équations du troisième degré. Ce n'est qu'au XVI^{e} siècle qu'un mathématicien italien Tartaglia découvrit une méthode générale de résolution de ces équations. Il eut pour cela recourt à l'utilisation de ce qui fut qualifié à l'époque d'artifice : une racine carrée de -1, c'est à dire un nombre x imaginaire tel que $\sqrt{x} = -1$. Ce n'est que par la suite que ce nombre acquèrera sont statut de nombre, sera renommé i et donnera naissance aux nombres complexes qui seront étudiés en tant que nombres et permettront le développement de pans entiers des Mathématiques.

Définition :

Il existe un ensemble noté $\mathcal{C}$ et appelé *ensemble des nombres complexes* tel que :

- $\mathcal{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- l'addition et la multiplication des nombres complexes « prolongent » l'addition et la multiplication des nombres réels. (c'est à dire que l'addition ou la multiplication de deux nombres réels considérés comme nombres complexes est l'addition ou la multiplication usuelle sur les nombres réels) ;
- Il existe un unique nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.

L'écriture $z = a + ib$ est appelée *forme algébrique* du nombre complexe z.

Le nombre réel a est appelé *partie réelle* du nombre complexe z et noté $\mathcal{R}e(z)$.

Le nombre réel b est appelé *partie imaginaire* du nombre complexe z et noté $\mathcal{I}m(z)$.

Si $a = 0$, le nombre z s'écrit $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. On dit alors que z est un imaginaire pur.

Exemples :

Le réel 3 est aussi un nombre complexe, il s'écrit $3 = 3 + 0 \times i$. Le nombre $3 + 2i$ est un nombre complexe non réel. Sa partie imaginaire est 2 et sa partie réelle est 3..

Remarque :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

2 Opérations sur les nombres complexes

Définition :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a'i + b'$ deux nombres complexes avec a, b, a' et b' réels.

- On définit l'opposé de z et on note $-z$ le nombre $-z = -a - ib$.
- On définit l'addition des nombres complexes z et z' et on note $z + z'$ le nombre :

$$z + z' = a + a' + i(b + b')$$

- On définit la multiplication des nombres complexes z et z' et on note zz' le nombre :

$$zz = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$$

- Tout nombre complexe non nul z admet un inverse, c'est à dire un nombre z' tel que $zz' = 1$, noté $z' = \frac{1}{z}$.

Remarque :
L'addition et la multiplication dans les complexes prolongent l'addition et la multiplication dans les réels car, si z et z' sont réels, c'est $z = a$ et $z' = a'$ avec a et a' réels, alors $z + z' = a + a'$ et $zz' = aa'$.

Exemple :
$(3+2i)+(5-4i) = 8-2i$ et $(3+2i)(5-4i) = 3\times 5+(2i)(-4i)+5\times 2i-3\times 4i = 15+8+10i-12i = 23-2i$

Propriétés :

Pour tous les nombres complexes z et z',

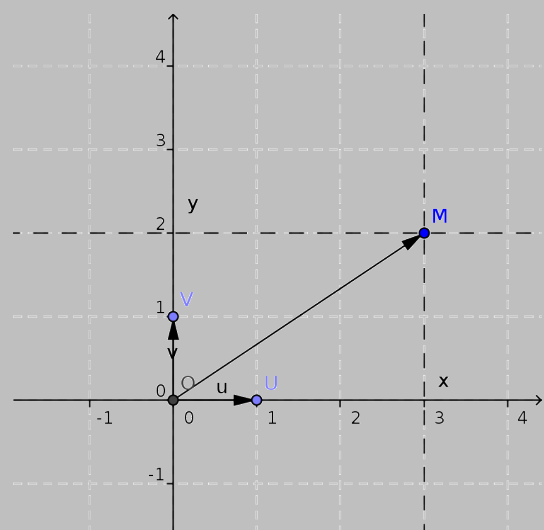
- $(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$
- $(z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$
- $(z - z')(z + z') = z^2 - z'^2$
- $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

3 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition :

Soit $(O;\vec{u};\vec{v})$ un repère orthonormé du plan.

- Á tout nombre complexe $z = a+ib$ avec a et b réels, on associe le point M de coordonnées $(a;b)$. On dit que M est *le point image de M* et que $\vec{OM}$ est *le vecteur image de M*.
- Tout point M de coordonnées $(x;y)$ est le point image d'un unique complexe $z = x+iy$. On dit que z est l'affixe du point M et du vecteur $\vec{OM}$.



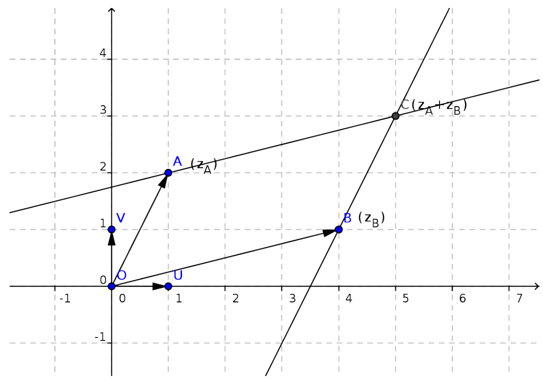
Remarques :

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses qui est pour cette raison aussi appelé *axe réel*.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points de l'axe des ordonnées qui est pour cette raison aussi appelé *axe imaginaire pur*.

Propriétés :

On considère deux points A et B du plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ d'affixes respectives z_A et z_B, alors

- le vecteur $\vec{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- la somme $z_A + z_B$ a pour image le quatrième sommet C du parallélogramme $OACB$.
- L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.



Preuve :

- A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et par ailleurs, $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$. Le vecteur $\vec{AB}$ a donc pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$ dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et donc pour affixe $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = z_B - z_A$ dans ce repère.
- Soit z_C l'affixe de C. $OACB$ est un parallélogramme signifie que $\vec{OA} = \vec{BC}$ ce qui se traduit d'après la propriété précédente par $z_A - z_O = z_C - z_B$ soit $z_C = z_A + z_B$.
- On sait que $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$ et $z_I = x_I + y_I$ d'où le résultat.

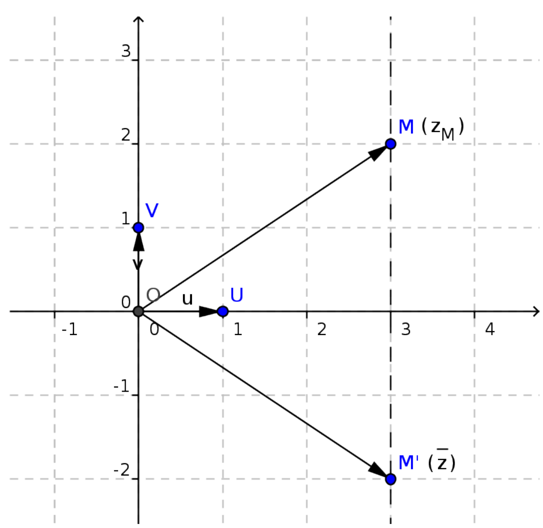
4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

Pour tout nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$ avec a et b réels, on appelle *conjugué de z* le nombre noté $\bar{z}$ et défini par $\bar{z} = a - ib$.

Remarque :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisse.



Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.
- z est réel si et seulement $\bar{z} = z$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$;
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$;
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$;
- pour tout entier naturel n non nul, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$;
- si $z \neq 0$, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$;
- si $z \neq 0$, $\overline{\frac{z'}{z}} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$;

Preuve :
- Soit $z = a + ib$ avec a et b réels. $z = \bar{z}$ s'écrit $a + ib = a - ib$ c'est à $ib = -ib$ ou encore $2ib = 0$ ce qui équivaut à $b = 0$ c'est à dire $z = a$ réel.
- Soit $z = a + ib$ avec a et b réels. $\bar{z} = -z$ équivaut à $a - ib = -(a + ib)$ c'est à dire $a - ib = -a - ib$ ce qui équivaut à $2a = 0$ donc à $a = 0$.
- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. $\bar{z} + z' = a - ib + a' - ib' = a + a' - i(b + b') = \overline{z + z'}$.
- Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. D'une part, $\overline{zz'} = \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{aa' - bb' + iba' + ib'a} = aa' - bb' - i(ba' + b'a)$ et d'autre part, $\bar{z}\bar{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - bb' - ia'b - iab' = aa' - bb - i(ba' + b'a)$ d'où l'égalité.
- Vrai pour $n = 1$. Si l'égalité $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ est vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour $n + 1$, on a $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z}$. D'après la propriété précédente (qui n'est autre que le cas $n = 2$...), on peut écrire que $\overline{z^{n+1}} = \bar{z^n}\bar{z}$. Or, par hypothèse de récurrence, on a $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ donc $\overline{z^{n+1}} = (\bar{z})^n\bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$ et par récurrence, on en déduit qu'elle est vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}^*$
- Soit $z = a + ib$, alors $\overline{\frac{1}{z}} = \overline{\frac{1}{a+ib}} = \overline{\frac{a-ib}{a^2+b^2}}$ en multipliant par $a - ib$ le dénominateur et le numérateur. Ceci est encore égal à $\frac{a+ib}{a^2+b^2}$.
  Par ailleurs, $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$ en multipliant numérateur et dénominateur par $a+ib$. D'où l'égalité.
- $\overline{\frac{z'}{z}} = \overline{z'\frac{1}{z}} = \bar{z'}\overline{\frac{1}{z}} = \bar{z'}\frac{1}{\bar{z'}} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$.

5 Équations du second degré à coefficients réels

Théorème :

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution réelle $-\frac{b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Preuve (troisième cas) :
Dans tous les cas, $az^2+bz+c = a(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}) = a((z-(-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}) = a((z-(-\frac{b}{2a}))^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$ est l'écriture canonique de az^2+bz+c.
L'équation s'écrit donc $(z-(-\frac{b}{2a}))^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$.
Si $\Delta < 0$ alors $-\Delta > 0$ donc $\sqrt{-\Delta}$ existe et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = -(-\Delta) = \Delta$ donc $i\sqrt{-\Delta}$ a pour carré Δ.
Par conséquent, $z-(-\frac{b}{2a}) = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z-(-\frac{b}{2a}) = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ donc $z = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$.

6 Module et argument d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = ai+b$ avec a et b réels un nombre complexe. On appelle *module de z* le nombre noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$, si M est l'image de z, alors $OM = |z|$.

Remarques :

- Si x est un nombre réel, alors le module de x et la valeur absolue de x sont égaux, d'où l'utilisation de la même notation.
- $z\bar{z} = a^2+b^2 = |z|^2$.

Exemple :
Si $z = -3+\sqrt{3}i$ alors $\|z\| = \sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$.

Définition :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul d'image M on appelle *argument de z* et on note $\arg(z)$ tout mesure en radians de l'angle orienté :

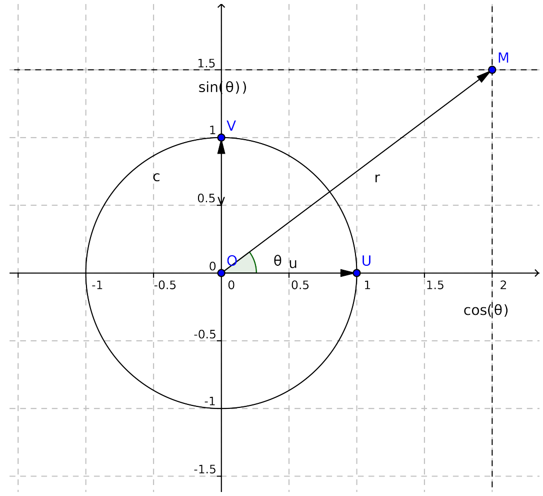
$$(\vec{u};\vec{OM})$$

Si θ est une mesure de cet angle orienté, on note $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$ ou plus simplement $\arg(z) = \theta$.

Propriété et définition :

Soit z un un nombre complexe non nul.

- l'écriture $z = r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ est appelé *forme trigonométrique de z*.
- Réciproquement, si $z = \rho(\cos(\alpha)) + i\sin(\alpha))$ avec $\rho > 0$ alors $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \alpha$.
- Si $z = x+iy$ alors $\cos\theta = \frac{x}{\|z\|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\|z\|}$.



Propriétés :

> Pour tout nombre complexe z non nul :
> - $\arg \bar{z} = -\arg z$;
> - z est réel si et seulement si $\arg(z) = 0\,(2\pi)$ ou $\arg z = \pi\,(2\pi)$;
> - z est imaginaire pur si et seulement si $\arg z = \frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ ou $\arg z = -\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$;

Propriétés :

> Pour tous les nombres complexes z et z' :
> - $|zz'| = |z||z'|$;
> - pour tout entier naturel n, $|z^n| = [z|^n$;
> - $\|\frac{z}{z'}\| = \frac{|z|}{|z'|}$;
> - $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,(2\pi)$;
> - $\arg(z^n) = n\arg(z)\,(2\pi)$;
> - $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\,(2\pi)$.

Preuve :

- Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.
  Alors $zz' = rr'(\cos\theta\cos\alpha + i\sin\theta\cos\alpha + i\sin\alpha\cos\theta - \sin\theta\sin\alpha)$
  c'est à dire $zz' = rr'(\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha))$.
  donc $|zz'| = rr'$ et $\arg(zz') = \theta + \alpha$
- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
  Initialisation : pour $n = 1$, $|z^1| = |z| = |z|^1$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Hérédité : si pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z^n z| = |z^n||z|$ d'après la propriété précédente. Puisque par hypothèse de récurrence, $|z^n| = |z|^n$, alors $|z^{n+1}| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}$. C'est la propriété au rang $n+1$ Conclusion : Puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraie, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n| = |z|^n$.
- Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
  Initialisation : pour $n = 1$, $\arg(z^1) = \arg(z) = \arg(z)^1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$. Hérédité : Si pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z^n) = n\arg(z)$, alors $\arg(z^{n+1}) = \arg(z^n z) = \arg(z^n) +$

$\arg(z)$ d'après la première propriété. Puisque par hyptohèse de récurrence, $\arg(z^n) = n\arg(z)$ donc $\arg(z^{n+1}) = n\arg(z) + \arg(z) = (n+1)\arg(z)$: c'est la propriété au rang $n+1$.
Conclusion, puisque l'initialisation et l'hérédité sont vraies, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

Propriétés :

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soient A et B sont deux points d'affixes respectives a et b. Alors :
- $AB = |b - a|$;
- $(\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(b - a)$.
- Si C et D sont deux autres points d'affixes respectives c et d, $\arg \frac{d-c}{b-a} = (\vec{AB}; \vec{CD})$.

7 Notation exponentielle

Définition et propriété :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

- Pour tous les réels θ et θ', on a $f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$.
- On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' est définie par : $f'(\theta) = \cos'(\theta) + i\sin'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta)$
- On a $f'(\theta) = if(\theta)$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = i$.

Preuve :
Seul le premier point n'est pas immédiat. D'une part,

$$\begin{aligned} f(\theta + \theta') &= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta') \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(t\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta') \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(t\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta') \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

Définition :

D'après ce qui précède, par analogie avec la fonction exponentielle, on pose pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Soit z un nombre complexe non nul. L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée *forme exponentielle* de z.

Propriétés :

Pour tous les réels θ et θ' et tout entier naturel n non nul :
- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta$;
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$;
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Preuve :

- $|e^{i\theta}| = |\cos(\theta) + i\sin(\theta)|$ par définition. Par ailleurs, $|\cos(\theta) + i\sin(\theta)|^2 = (\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$.
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = f(\theta)f(\theta') = f(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}$
- $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i\theta-i\theta} = e^0 = 1$ donc $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}\frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}e^{-i\theta'}$
- $\overline{e^{i\theta}} = \cos(\theta) \bar{+} i\sin(\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ et $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$ d'où l'égalité.
- On le montre par récurrence en utilisant le deuxième point.