Fonction logarithme népérien, cours, terminale S

1 Définition et propriétés algébriques

Définition :

On appelle fonction *logarithme népérien* et on note ln la fonction qui à tout réel x *strictement positif* associe l'unique réel y tel que ....
On a donc pour tout $x > 0$ et tout y réel, $\ln(x) = y$ si et seulement si ....

Propriétés :

- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} =$ ..... ;
- pour tout réel x, $\ln(e^x) =$ ... ;
- $\ln(1) =$ .... et $\ln(e) =$ ....

Preuve :
Conséquences directes de la définition.

Propriété (équation fonctionnelle) :

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) =$................. .

Preuve :
Pour tous les réels a et b strictement positifs, $e^{\ln(a)+\ln(b)} =$ ....
$\ln(a) + \ln(b)$ est donc une solution de l'équation ....
Or par définition de ln, l'unique solution de cette équation est $\ln(ab)$.
D'où $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,
- $\ln(\frac{1}{a}) =$ .... ;
- $\ln(\frac{a}{b}) =$ .... ;
- pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) =$ .... ;
- $\ln(\sqrt{a}) =$ .... ;

Preuve :

- D'une part, $\ln(a \times \frac{1}{a}) =$ ....
  D'autre part, $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a})$
  Donc $\ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) =$ ....
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) =$................. .... d'après ce qui précède.
- Par récurrence pour n entier naturel.
  Initialisation : Pour tout $a > 0$, $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0\ln(a) = 0$ d'où $\ln(a^0) = 0\ln(a)$.
  La propriété est donc vraie au rang 0. Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $\ln(a^k) = k\ln(a)$.
  Alors $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k)\ln(a)$ car $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
  Puis $\ln(a^k)\ln(a) = k\ln(a)\ln(a)$ par hypothèse de récurrence.
  Donc $\ln(a^{k+1}) = (k+1)\ln(a)$. La propriété est donc héréditaire.
  Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel n, $\ln(a^k) = k\ln(a)$.
  On utilise en plus, le fait que $\ln(a^n) = \ln(\frac{1}{a^{-n}})$ si n est un entier négatif.
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) =$................. .... D'où le résultat.

Exemples :

- $\ln(65536) = ...$
- $\ln(81) = ...$
- $\ln(81 \times 65536) = ...$
- $\ln(1/10^8) = ...$

2 Étude de la fonction logarithme népérien

2.1 Dérivabilité

Propriété :

> La fonction ln est dérivable sur $]0; +\inf[$ et
>
> $$\ln'(x) = ...$$

Preuve :

Dérivabilité admise. Pour montrer la formule on part de $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.
En dérivant on obtient(en tenant compte de la fonction composée de la forme e^u), $(\ln(x))'e^{\ln(x)} = 1$ donc $(\ln(x))'x = 1$ donc $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Propriété :

> La fonction ln est strictement .... sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

La dérivée est $x \mapsto$ .... qui est ....

2.2 Égalités et inégalités

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,
- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si .... ;
- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si ....

Preuve :
- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si .... c'est à dire ....

- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si .... c'est à dire ....

Exemples d'application à la résolution d'équations et d'inéquations :
- $e^x = 2$ équivaut à ....
- Résolution de $\ln(3x+4) = 5$
  On recherche d'abord l'ensemble de définition : $3x + 4 > 0$ si et seulement si ....
  L'ensemble de définition est donc ...
  On résout ensuite l'équation dans cet ensemble de définition :
  $\ln(3x+4) = 5$ équivaut à $e^{\ln(3x+4)} = e^5$ c'est à dire à ....
  ...
  On vérifie que la solution est bien dans l'ensemble de définition : ...
  Il y a donc une unique solution est donc ....
- Résolution de $\ln(3x+4) < 5$:
  On recherche d'abord l'ensemble de définition :
  L'ensemble de définition est ...
  On résout ensuite l'inéquation dans cet ensemble de définition : $\ln(3x+4) < 5$ équivaut à $e^{\ln(3x+4)} < e^5$ c'est à dire à ....
  ...
  L'ensemble des solutions est l'intersection de l'ensemble de définition et de l'ensemble déterminé par la résolution de l'inéquation :
  ...

2.3 Limites

Propriété, limites :

> On a $\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(x) =$........... et $\lim_{x\mapsto 0^+}\ln(x) =$.......... .
> La droite d'équation .... est donc une asymptote .... à la courbe en 0.

Preuve :
Soit M un réel. Pour tous les réels x tels que $x > e^M$ (il en existe car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$),la fonction ln est strictement .... sur $]0;+\infty[$ donc $\ln(x) > \ln(e^M)$ d'où $\ln(x) >$ .... La fonction ln a donc bien pour limite .... en $+\infty$.
Pour $x > 0$, on pose $X = \frac{1}{x}$. Alors $\ln(x) = \ln(\frac{1}{X}) = -\ln(X)$. Or $\lim_{x\to 0, x>0} X =$............. . Or $\lim_{X\to+\infty}(-\ln(X)) =$....... donc $\lim_{x\to 0}\ln(x) =$.......... .

2.4 Tableau de variation

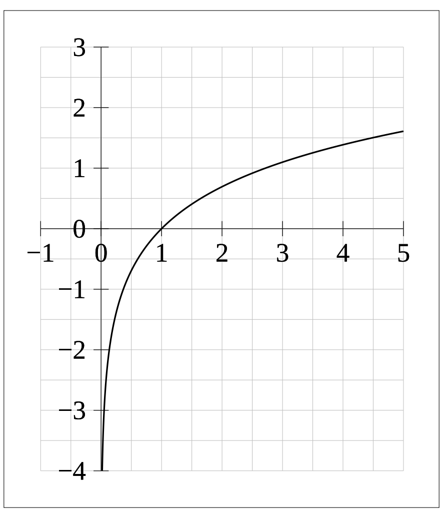
x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	...	...	
$\ln(x)$	... ...	...	...

2.5 Tableau de signe

x	0		....		$+\infty$
$\ln(x)$	....	...	...	....	

2.6 Représentation graphique

On parle de *croissance logarithmique* pour décrire une telle évolution.



2.7 Dérivation de fonctions composées avec ln

Propriété :

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln(u)$ est définie et dérivable sur I et on a :

$$(\ln(u))' = ...$$

2.8 Croissances comparées

Propriétés : croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = ...$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = ...$$

et

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = ...$$

Preuve :

- Pour $x > 0$, on pose $X = \ln(x)$ d'où $\frac{\ln(x)}{x} = ...$ Or $\lim_{x\to+\infty} X = ...$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = ...$ D'où le résultat.

- On pose $X = ...$ $\lim_{x\to 0} x\ln(x) =$.............
- On considère pour $x \neq 1$, $\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$. ln est dérivable en 1 donc ce taux d'accroissement a une limite qui est le nombre dérivé de ln en 1, c'est à dire 1.