Fonction logarithme népérien, cours de Terminale S

F.Gaudon

12 février 2018

Table des matières

1 Définition et propriétés algébriques

Définition :

On appelle fonction *logarithme népérien* et on note ln la fonction qui à tout réel x *strictement positif* associe l'unique réel y tel que $e^y = x$
On a donc pour tout $x > 0$ et tout y réel, $\ln(x) = y$ si et seulement si $e^y = x$.

Propriétés :

- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$;
- pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$;
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Preuve :
Conséquences directes de la définition.

Propriété (équation fonctionnelle) :

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Preuve :
Pour tous les réels a et b strictement positifs, $e^{\ln(a)+\ln(b)} =$ ....
$\ln(a) + \ln(b)$ est donc une solution de l'équation ....
Or par définition de ln, l'unique solution de cette équation est $\ln(ab)$.
D'où $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$;
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$;
- pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n \ln a$;
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$;

Preuve :
- D'une part, $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(1) = 0$.
  D'autre part, $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a})$
  Donc $\ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) = 0$ et $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ d'après ce qui précède.

- Par récurrence pour n entier naturel.
  Initialisation : Pour tout $a > 0$, $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0\ln(a) = 0$ d'où $\ln(a^0) = 0\ln(a)$.
  La propriété est donc vraie au rang 0. Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $\ln(a^k) = k\ln(a)$.
  Alors $\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k)\ln(a)$ car $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
  Puis $\ln(a^k)\ln(a) = k\ln(a)\ln(a)$ par hypothèse de récurrence.
  Donc $\ln(a^{k+1}) = (k+1)\ln(a)$. La propriété est donc héréditaire.
  Conclusion : Par récurrence, pour tout entier naturel n, $\ln(a^k) = k\ln(a)$.
  On utilise en plus, le fait que $\ln(a^n) = \ln(\frac{1}{a^{-n}})$ si n est un entier négatif.
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$. D'où le résultat.

Exemples :

- $\ln(65536) = \ln(2^{16}) = 16\ln(2)$;
- $\ln(81) = \ln(3^4) = 4\ln(3)$;
- $\ln(81 \times 65536) = \ln(81) + \ln(65536) = 16\ln(2) + 4\ln(3)$;
- $\ln(1/10^8) = -8\ln(10) = -8\ln(2) - 8\ln(5)$;

2 Étude de la fonction logarithme népérien

2.1 Dérivabilité et variations

Propriété :

La fonction ln est dérivable sur $]0; +\inf[$ et

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Preuve :

Dérivabilité admise. Pour montrer la formule on part de $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.
En dérivant on obtient(en tenant compte de la fonction composée de la forme e^u), $(\ln(x))'e^{\ln(x)} = 1$ donc $(\ln(x))'x = 1$ donc $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Propriété :

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

On utiliser le fait que la dérivée soit $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est positif.

2.2 Égalités et inégalités

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,
- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a = b$;
- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si $a < b$.

Preuve :
- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $e^{\ln(a)} = e^{\ln(b)}$ si et seulement si $a = b$.
- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si $e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$ si et seulement si $a < b$.

Exemples de résolution d'équations et d'inéquations :
- $e^x = 2$ équivaut à $x = \ln(2)$;
- Résolution de $\ln(3x+4) = 5$:
  On cherche d'abord l'ensemble de définition : $3x + 4 > 0$ équivaut à $x > \frac{-4}{3}$ donc l'ensemble de définition est $]\frac{-4}{3}; +\infty[$.
  On résout ensuite l'équation dans $]\frac{-4}{3}; +\infty[$:
  $\ln(3x+4) = 5$ équivaut à $e^{\ln(3x+4)} = e^5$ c'est à dire $3x + 4 = e^5$ donc $x = \frac{e^5-4}{3}$.
  On vérifie que la solution obtenue est bien dans l'ensemble de définition : $\frac{e^5-4}{3} \in]\frac{-4}{3}; +\infty[$.
  L'unique solution est donc $\frac{e^5-4}{3}$.
- Résolution de $\ln(3x+4) < 5$:
  On cherche d'abord l'ensemble de définition : on a vu précédemment qu'il s'agit de $]\frac{-4}{3}; +\infty[$.
  On résout ensuite l'inéquation dans cet ensemble de définition :
  $\ln(3x+4) < 5$ équivaut à $e^{\ln(3x+4)} < e^5$ donc à $3x + 4 < e^5$ et à $x < \frac{e^5-4}{3}$.
  L'ensemble des solutions est l'intersection de l'ensemble déterminé par l'inéquation et par l'ensemble de définition : $]\frac{-4}{3}; +\infty[\cap] - \infty; \frac{e^5-4}{3}[=]\frac{-4}{3}; \frac{e^5-4}{3}[$.

2.3 Limites

Propriété :

On a $\lim_{x \mapsto +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \mapsto 0^+} \ln(x) = -\infty$.
La droite d'équation $x = 0$ est donc une asymptote verticale à la courbe en 0.

Preuve :
Soit M un réel. Pour tous les réels x tels que $x > e^M$ (il en existe car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$),la fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc $\ln(x) > \ln(e^M)$ d'où $\ln(x) > M$. La fonction ln a donc bien pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
Pour $x > 0$, on pose $X = \frac{1}{x}$. Alors $\ln(x) = \ln(\frac{1}{X}) = -\ln(X)$. Or $\lim_{x\to 0, x>0} X = +\infty$. Or $\lim_{X\to+\infty}(-\ln(X)) = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

2.4 Tableau de variation

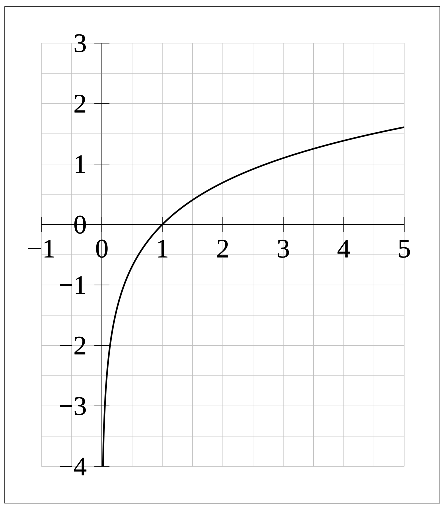
x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|$	$+$	
$\ln(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.5 Tableau de signe

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|$	-	0	$+$	

2.6 Représentation graphique

On parle de *croissance logarithmique* pour décrire une telle évolution.



2.7 Dérivation de fonctions composées avec ln

Propriété :

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln(u)$ est définie et dérivable sur I et on a :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

2.8 Croissances comparées

Propriétés :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0$$

et

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Preuve :

- Pour $x > 0$, on pose $X = \ln(x)$ d'où $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{X}{e^X}$. Or $\lim_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$. D'où le résultat.
- On pose $X = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \to 0} x \ln(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln(X)}{X} = 0$.
- On considère pour $x \neq 1$, $\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$. ln est dérivable en 1 donc ce taux d'accroissement a une limite qui est le nombre dérivé de ln en 1, c'est à dire 1.