Fonction logarithme népérien, cours de Terminale S

F.Gaudon

17 juillet 2012

Table des matières

1 Construction du logarithme népérien

Historiquement la fonction logarithme népérien a été introduite aux XV[e] et XVI[e] siècles par Neper afin de simplifier les calculs astronomiques. En particulier la problématique était de rechercher une fonction transformant les multiplications en additions.

On cherche donc une fonction f qui vérifie $f(ax) = f(a)+f(x)$ pour tous les réels strictement positifs a et x.

Propriété :

> Soit f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : pour tous réels a et x strictement positifs, $f(ax) = f(a) + f(x)$, alors $f'(x) = \frac{k}{x}$ où k est un nombre réel.

Preuve :

On suppose dans un premier temps qu'une telle fonction f existe. Alors $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$. D'autre part, soit $a > 0$, pour tous les réels $x > 0$, on a $f(ax) = f(a) + f(x)$ d'où en dérivant $af'(ax) = f'(x)$ et pour $x = 1$ on obtient $af'(a) = f'(1)$ donc $f'(a) = \frac{f'(1)}{a}$. D'où pour tous les réels $x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$. Choisissons $f'(1) = k$ où k est un réel quelconque puisqu'aucune contrainte ne semble fixer $f'(1)$. On a donc $f'(x) = \frac{k}{x}$ pour tout réel $x > 0$.

Propriété et définition :

> Il existe une unique fonction notée ln définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée est $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$. Cette fonction est appelée *fonction logarithme népérien*.

Preuve :

Admise.

2 Propriétés algébriques

Propriété :

> Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Preuve :

Soit $a > 0$. On pose pour tout réel $x > 0$, $h(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$. Il s'agit de montrer que h est nulle h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $h'(x) = a\frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$. h' est donc la fonction nulle d'où ses primitives sont constantes. h est donc constante. Comme $h(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0$, h est donc la fonction nulle aussi. D'où pour tout $x > 0$ et tout $a > 0$ on a $\ln(ax) = \ln(a) + ln(x)$.

Propriétés :

> Pour tous les réels a et b strictement positifs,
> - $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$;
> - pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n \ln a$;
> - $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$;

Preuve :

- D'une part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln(1) = 0$.
  D'autre part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln(b) + \ln(\frac{1}{b})$
  Donc $\ln(b) + \ln(\frac{1}{b}) = 0$.
  Enfin, $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ d'après ce qui précède.
- Découle directement du fait que $\ln(a^n) = \underbrace{\ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a)}_{n \text{ fois}}$.
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$. D'où le résultat.

Exemples :

- $\ln(32) = \ln(2^5) = 5\ln(2)$;
- $\ln(1/10^8) = -8\ln(10)$.

3 Logarithme décimal

Définition :

> La fonction *logarithme décimal* est la fonction notée log définie sur $]0; +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Propriété :

> Pour tout entier relatif n, $\log 10^n = n$.

Preuve :

$\log 10^n = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = n\frac{\ln 10}{\ln 10} = n$.