Limites de fonctions, cours, terminale S

1 Limites finies à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

Définition :

Soit l un réel. f admet pour limite l en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout intervalle contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour tous les réels x supérieurs à x_0 (resp. pour tous les réels x inférieurs à x_0) , $f(x)$ appartient à cet intervalle. On note alors .... (resp. ....).
On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$).

Propriété :

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$ .... et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$ ....
Pour tout entier naturel $k > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} =$ .... et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} =$ ....
Pour tout entier naturel non nul k, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-k} =$ ..... et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-k} =$ ....

Définition :

Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.
On dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si .... (resp. ....).

Exemples :
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$ ..... et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$ .... donc la droite d'équation .... est une asymptote horizontale à l'hyperbole en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 Limites infinies à l'infini

Définition :

f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$ en $+\infty$) si pour tout intervalle $]M;+\infty[$ (resp. $]-\infty;M]$) où M est un réel, il existe un réel x_0 tel que pour tous les réels x supérieurs à x_0, $f(x) \in]M;+\infty[$ (resp. $f(x) \in]-\infty;M]$).
On note alors .... (resp. ....).
On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$.

Remarque :
On définit de même les limites en $-\infty$.

Propriétés :

Pour tout entier naturel k non nul,
- $\lim_{x\to+\infty} x^k =$ ......
- $\lim_{x\to-\infty} x =$ ......
- $\lim_{x\to-\infty} x^2 =$ ......
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 =$ ......
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$ ......

3 Limites en un réel

On conidère dans ce paragraphe une fonction f définie sur un ensemble D_f et $a \in D_f$ où a est l'extrémité d'un intervalle de D_f.

Définition :

- f admet pour limite à droite $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si pour tout intervalle $]u; v[$ contenant l il existe un réel $x_0 > a$ tel que pour tout $x \in]a; x_0[$ on a $f(x) \in]u; v[$ (resp. si pour tout intervalle $]u; +\infty[$, il existe x_0 tel que pour tout $x \in]a; x_0[$ on a $f(x) \in]u; +\infty[$).
  On note alors .... (resp. ....).
- f admet pour limite à gauche $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si pour tout intervalle $]u; v[$ contenant l, il existe un réel $x_0 < a$ tel que pour tout $x \in]x_0; a[$ on a $f(x) \in]u; v[$ (resp. si pour tout intervalle $]u; +\infty[$, il existe x_0 tel que pour tout $x \in]x_0; a[$ on a $f(x) \in]u; +\infty[$).
  On note alors .... (resp. ....).

Exemple :
$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} =$ ..... et $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} =$ ....

Définition :

Soit a un réel, $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère. On dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}$ si ....

Propriété :

Soit f une fonction telle que $f = \frac{g}{h}$ où g et h sont deux autres fonctions. Si g tend vers .... et h tend vers 0 en un réel a, alors f tend vers .... , le signe restant à déterminer.

Exemples :
- La courbe de la fonction ln admet une asymptote verticale d'équation ....

- $\lim_{x \underset{>}{\to} 1} x+1 =$ .... et $\lim_{x \underset{>}{\to} 1} x-1 =$ ......
  $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} x+1 =$ ..... et $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} x-1 =$ ......
  donc $\lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{x+1}{x-1} =$ .... et $\lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{x+1}{x-1} =$ ......
  D'où la droite d'équation .... est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

4 Opérations sur les limites

4.1 Addition, multiplication, quotient

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$	....	....	....	....	....	....

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x\to a} (fg)(x)$	......	......	.....	.....	.....

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l \in \mathbb{R}$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}*$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$	....	....	.....

4.2 Limites de fonctions composées

Théorème :

a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g des fonctions. Si $\lim_{x\to .....} f(x) =$ ..... et $\lim_{X\to ....} g(X) =$ ..... alors $\lim_{x\to ....} g(f(x)) =$ .....

Exemple :
Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $-\sqrt{3x^2+4}$. On a $\lim_{x\mapsto+\infty} 3x^2+4 =$ ...... et $\lim_{X\mapsto+\infty} -\sqrt{X} =$ ...... donc $\lim_{x\mapsto+\infty} h(x) =$ ......

5 Comparaison et limites

Propriété :

Si f et g sont deux fonctions telles que pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) =$ .... alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ ....

Remarque :
Si pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x\to+\infty} g(x) =$ ...... alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ ....

Preuve :
Soit $[A;+\infty[$ avec A un nombre réel. Puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, il existe x_O tel que pour tout $x \geq x_0$, ...
Comme, pour x assez grand $f(x) \geq g(x)$, on en déduit que pour x assez grand .... ce qui justifie que $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$.......

Théorème des gendarmes :

Si f, g et h sont des fonctions et l est un nombre réel tel que :
- pour x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = ...$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = ...$

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ...$

6 Cas des fonctions exponentielles et logarithme népérien

6.1 Exponentielle

Propriété :

- $\lim_{x\to+\infty} e^x = ...$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = ...$

Preuve ⊙ :

- Soit h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) =.........$.
  On a pour tout $x > 0$, $h'(x) =......$.
  $h'(x) > 0$ si et seulement si .... c'est à dire $x >$ ....
  On en déduit que h est .... sur .... Comme par ailleurs $h(0) = ...$, on a donc pour tout $x > 0$, $h(x)$...... c'est à dire ....
  Comme $\lim_{x\to+\infty} x = ...$, par comparaison on obtient $\lim_{x\to+\infty} e^x = ...$
- On pose $X = ...$ On a $\lim_{x\to-\infty} ..... = \lim_{X\to+\infty} .... = \lim_{X\to+\infty} ....$ D'après le cas précédent, $\lim_{X\to+\infty} .... = ...$ donc $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = ...$

Propriété (croissances comparées) :

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = ...$
- $\lim_{x\to-\infty} xe^x = ...$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = ...$

Remarque :

Pour tout entier naturel k non nul, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = ...$ et $\lim_{x\to-\infty} x^k e^x = ...$

6.2 Fonction logarithme népérien

Propriété :

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = ...$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = ...$