

Fonctions trigonométriques, cours, terminale S

F.Gaudon

25 mars 2013

Table des matières

1	Fonctions trigonométriques	2
2	Étude des fonctions cosinus et sinus sur $[0; \pi]$	3
2.1	Fonction cosinus	3
2.2	Fonction sinus	3
3	Applications	4
3.1	Résolution d'inéquations trigonométriques	4
3.2	Exemple d'étude de fonctions	4

1 Fonctions trigonométriques

Définition :

- La fonction *cosinus* est la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto \cos(x)$.
- La fonction *sinus* est la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto \sin(x)$.

Propriété :

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur \mathbb{R} et :

- $\sin'(x) = \cos(x)$;
- $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Définitions :

- On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est *paire* si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$ c'est à dire si sa courbe représentative dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est *impaire* si pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$ c'est à dire si sa courbe représentative dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- On dit qu'une fonction f définie sur \mathbb{R} est *périodique* de période T si pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

Propriétés :

- Pour tout x réel, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions *périodiques* de période 2π .
- Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est une fonction *paire*.
- Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin(x)$. La fonction sinus est une fonction *impaire*.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(4x)$.

Pour tout réel x , $f(-x) = \cos(-4x) = \cos(4x) = f(x)$ donc f est une fonction paire.

Pour tout réel x , $f(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(4(x + \frac{\pi}{2})) = \cos(4x + 2\pi) = \cos(4x) = f(x)$ donc f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

2 Étude des fonctions cosinus et sinus sur $[0; \pi]$

2.1 Fonction cosinus

Signe :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	+	0	-

Variations :

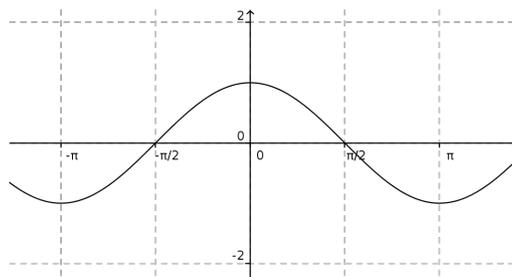
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	0	-1

Preuve des variations :

Pour tout $x \in [0; \pi]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$. Pour tout $x \in]0; \pi[$ $\sin(x) > 0$ donc $\cos'(x) < 0$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0; \pi]$.

Représentation graphique :

La représentation graphique de la fonction cosinus est appelée *cosinusoïde*.



2.2 Fonction sinus

Signe :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	+	+
			0

Variations :

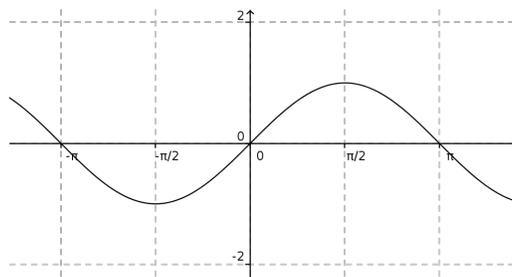
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0

Preuve :

Pour tout $x \in [0; \pi]$, $\sin'(x) = \cos(x)$. Pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) > 0$ et pour tout $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$, $\cos(x) < 0$ donc la fonction sinus est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$.

Représentation graphique :

La représentation graphique de la fonction sinus est appelée *sinusoïde*.



3 Applications

3.1 Résolution d'inéquations trigonométriques

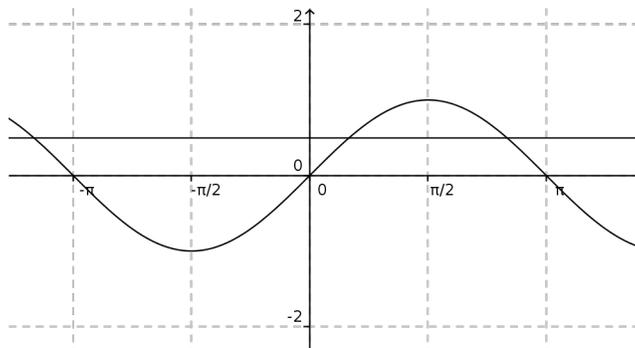
Exemple :

Résolution de l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ sur $[0; \pi]$.

On sait que l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions sur \mathbb{R} , $\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ et $\pi - \frac{\pi}{6} + 2k_2\pi$ avec k_1 et k_2 entiers relatifs.

Les solutions sur $[0; \pi]$ sont donc $\frac{\pi}{6}$ et $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

D'après les variations de la fonction sinus sur $[0; \pi]$, l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ a donc pour solutions $[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$ sur $[0; \pi]$.



3.2 Exemple d'étude de fonctions

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x)$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos(x)$.

$f'(x) \geq 0$ équivaut à $\frac{1}{2} - \cos(x) \geq 0$ c'est à dire $\frac{1}{2} \geq \cos(x)$

On sait que $\cos(x) = \frac{1}{2}$ a pour solutions $\frac{\pi}{3} + 2k_1\pi$ et $-\frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$ sur \mathbb{R} où k_1 et k_2 sont des entiers relatifs.

Donc sur $[0; \pi]$, l'unique solution est $\frac{\pi}{3}$.

Par lecture du cercle trigonométrique, l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ a pour solutions $[\frac{\pi}{3}; \pi]$.

Par conséquent, on a le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗
		$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	

