Fonctions exponentielles, cours, terminale S

F.Gaudon

27 juin 2013

Table des matières

1 Définitions et propriétés algébriques

Propriété :

Soit f une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f' = f$ et telle que $f(0) = 1$. Alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve :
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)f(-x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.
On en déduit que h est constante. Or $h(0) = f(0)f(-0) = 1$ donc pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$ ce qui assure que f ne s'annule pas.

Propriété et définition :

On appelle *fonction exponentielle de base e* l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Preuve :
L'existence est admise. Montrons l'unicité d'une telle fonction.

Tout d'abord, d'après la propriété précédente, une telle fonction ne s'annule pas.
Montrons maintenant l'unicité. Soient donc f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' = f$, $g' = g$, $f(0) = 1$ et $g(0) = 1$.
On vient de montrer que g ne s'annule pas, on peut donc considérer la fonction q définie sur $\mathbb{R}$ par $q = \frac{f}{g}$.q est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $q'(x) = \frac{f'g-g'f}{g^2} = \frac{fg-gf}{g^2} = 0$.
Par conséquent, la fonction q est constante sur $\mathbb{R}$. Or $q(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1}$ d'où $\frac{f}{g} = 1$ et $f = g$, ce qui achève la démonstration.

Notation :

On note e l'image $\exp(1)$ de 1 par la fonction exponentielle. $e \approx 2,71$.
Pour tout x réel, $\exp(x)$ est noté e^x et on lit « exponentielle x » ou « e exposant x ».

Propriétés :

Pour tous les réels a et b réel,

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$$

c'est à dire

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

Preuve :
Soit b un réel. On a vu plus haut que exp ne s'annule pas. Pour tout réel b, on peut donc définir la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{f(b+x)}{f(x)}$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = \frac{f'(a+x)f(x) - f(a+x)f'(x)}{f(x)^2}$. Or $f' = f$ donc $h'(x) = \frac{f(a+x)f(x) - f(a+x)f(x)}{f(x)^2} = 0$. La fonction h est donc une constante.
Or $h(0) = \frac{f(a+0)}{f(0)} = \frac{f(a)}{1} = f(a)$. D'où pour tout réel x, $h(x) = f(a)$, c'est à dire $\frac{f(a+x)}{f(x)} = f(a)$ et $f(a+x) = f(a)f(x)$.

Conséquences :

pour tout entier relatif n et pour tous les réels x et x' on a :
- $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$ c'est à dire $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$;
- $\frac{\exp(x)}{\exp(x')} = \exp(x - x')$ c'est à dire $\frac{e^x}{e^{x'}} = e^{x-x'}$;
- $(\exp(x))^n = \exp(nx)$ c'est à dire $(e^x)^n = e^{xn}$;

Preuve :
- Pour tous les réels x, $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1$ donc $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
- Pour tous les réels x et x', $\frac{\exp(x)}{\exp(x')} = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(x')}$ et on utilise le résultat précédent.
- Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont évidents. Le cas $n = 2$ correspond au premier point de la propriété. Si pour un rang n entier supérieur à 2, $\exp(x)^n = \exp(nx)$, alors au rang $n + 1$, on obtient $\exp(x)^{n+1} = \exp(x)^n \exp(x)$ d'après le premier point de la propriété.
  Par l'hypothèse de récurrence au rang n, on peut dire que $\exp(x)^n = \exp(nx)$ donc $\exp(x)^{n+1} = \exp(nx)\exp(x) = \exp((n+1)x)$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$. Par conséquent, par récurrence, la propriété est vraie pour tous les rangs n positifs. Si $n < 0$, on utilise la première propriété.

2 Étude de la fonction

2.1 Dérivabilité

Propriétés :

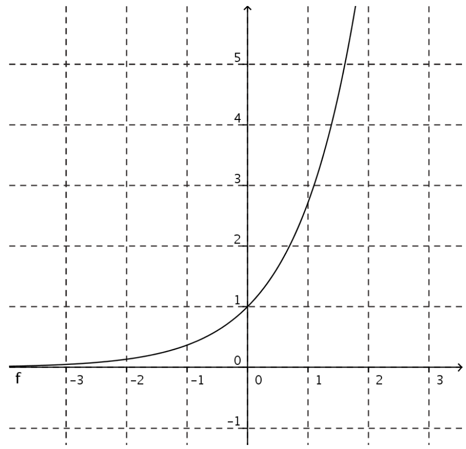
- La fonction exponentielle exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $\exp'(x) = \exp(x)$.
- la fonction exponentielle exp est strictement positive.
- la fonction exponentielle exp est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$;

Preuve :
Le premier point n'est qu'une reécriture de la définition.
Pour tous les réels x et y, $f(x + y) = f(x)f(y)$ d'où pour $x = y$, $f(2x) = f(x)^2$ ce qui assure que $f(x)$ est strictement positif.
Comme $f' = f$, on en déduit que $f' > 0$ c'est à dire f est strictement croissante sur $] - \infty; +\infty[$.

2.2 Tableau de variations

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	

2.3 Courbe représentative



2.4 Tableau de signe

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$	$+$	

Propriété :

Pour tous les réels x et y :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

et

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

3 Limites

Propriété :

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Preuve :

- Montrons d'abord que pour tout réel x, $\exp(x) \leq x$.
  Pour cela, soit f la fonction définie par $f(x) = exp(x) - x$ pour tout réel x. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \exp(x) - 1$.
  $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $\exp(x) - 1 \geq 0$ c'est à dire $\exp(x) \geq 1$. Comme $\exp(0) = 1$ et exp est croissante sur $\mathbb{R}$, on déduit que pour tout $x \geq 0$, $\exp(x) \geq 1$ et $f'(x) \geq 0$. Par conséquent, f est croissante sur $[0; +\infty[$ et puisque $f(0) = 1$, on a pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 1$ donc $\exp(x) - x \geq 1$ et $\exp(x) \geq x + 1$.
  Comme $\lim_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$, par comparaison on obtient $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$.
- On utilise l'égalité $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$. $\lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\exp(x)}$.
  D'après ce qui précède $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$.

Propriété :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

que l'on traduit en disant que « la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction $x \mapsto x$ en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

que l'on traduit en disant que « la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction $x \mapsto x$ en $-\infty$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Preuve :

- Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$. On a $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.
  On a vu précédemment (dans la démonstration de $\lim x \to +\infty e^x = +\infty$) que pour tout réel $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ donc $f''(x) \geq 0$. D'où f' est croissante sur $[0; +\infty[$. Comme $f'(0) = 1$, on déduit que f' est strictement positive sur $[0; +\infty[$ et que f est strictement croissante. Par suite, de $f(0) = 1$ on déduit que pour tout réel x, $f(x) > 0$ c'est à dire $e^x > \frac{1}{2}x^2$ et $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$. De $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ on déduit le résultat voulu.
- On remarque que $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to+\infty} (-x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^x} = 0$.
- exp est dérivable en 0 et le nombre dérivé en 0 est 1 donc $\lim_{x\to 0} e^x - e^0 x - 0 = \lim_{x\to 0} e^x - 1x = 1$.

4 Étude de fonctions composées avec la fonction exponentielle

Propriété :

Soit u est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u'e^u$$

;

Cas particulier :

La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ où a est un réel fixé est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = ae^{ax+b}$ pour tout x réel.

Propriétés :

- Si $a < 0$, alors la fonction f définie ci-dessus est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $a > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- si $a < 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} e^{ax} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = +\infty$;
- si $a > 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} e^{ax} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = 0$.