Fonction exponentielle, cours, terminale S

1 Définitions et propriétés algébriques

Propriété ⊙ :

> Soit f une fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f' = f$ et telle que $f(0) = 1$. Alors f est de signe .... sur $\mathbb{R}$.

Preuve :
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)f(-x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) =$ ....
On en déduit que h est .... Or $h(0) =$ .... donc pour tout réel x, $f(x)f(-x) =$ ..... ce qui assure que f ne ....

Propriété et définition :

> On appelle *fonction exponentielle de base e* l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' =$ .... et ....

Preuve ⊙ :
L'existence est admise. Montrons l'unicité d'une telle fonction.

Tout d'abord, d'après la propriété précédente, une telle fonction ne s'annule pas.
Montrons maintenant l'unicité. Soient donc f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' =$ ...., $g' =$ ....., $f(0) =$ .... et $g(0) =$ ......
On vient de montrer que g ne s'annule pas, on peut donc considérer la fonction q définie sur $\mathbb{R}$ par $q = \frac{f}{g}$.q est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $q'(x) =$................ .
Par conséquent, la fonction q est constante sur $\mathbb{R}$. Or $q(0) =$ .... d'où $\frac{f}{g} =$ .... et $f = g$, ce qui achève la démonstration.

Notation :

> On note e l'image $\exp(1)$ de 1 par la fonction exponentielle. $e \approx$ ....
> Pour tout x réel, $\exp(x)$ est noté .... et on lit « exponentielle x » ou « e .... x ».

Propriétés :

> Pour tous les réels a et b réel,
>
> $$\exp(a+b) = \text{.....................}$$
>
> c'est à dire
>
> $$e^{a+b} = \text{................}$$

Preuve :
Soit b un réel. On a vu plus haut que exp ne s'annule pas. Pour tout réel b, on peut donc définir la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{f(b+x)}{f(x)}$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) =$.................
Or $f' = f$ donc $h'(x) = \frac{f(a+x)f(x)-f(a+x)f(x)}{f(x)^2} =$............. La fonction h est donc ....
Or $h(0) =$.......................... . D'où pour tout réel x, $h(x) = f(a)$, c'est à dire $\frac{f(a+x)}{f(x)} = f(a)$ et $f(a+x) = f(a)f(x)$.

Conséquences :

pour tout entier relatif n et pour tous les réels x et x' on a :
- $\frac{1}{\exp(x)} =$......... c'est à dire $\frac{1}{e^x} =$...........;
- $\frac{\exp(x)}{\exp(x')} =$.............. c'est à dire $\frac{e^x}{e^{x'}} =$............;
- $(\exp(x))^n =$.......... c'est à dire $(e^x)^n =$.............;

Preuve :
- Pour tous les réels x, $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) =$ .... donc $\exp(-x) =$............. .
- Pour tous les réels x et x', $\frac{\exp(x)}{\exp(x')} =$ .... et on utilise le résultat précédent.
- Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont évidents. Le cas $n = 2$ correspond au premier point de la propriété. Si pour un rang k entier supérieur à 2, $\exp(x)^k = \exp(kx)$, alors au rang $k+1$, on obtient $\exp(x)^{k+1} = \exp(x)^k \exp(x)$ d'après le premier point de la propriété.
  Par l'hypothèse de récurrence au rang k, on peut dire que $\exp(x)^k = \exp(kx)$ donc $\exp(x)^{k+1} = \exp(kx)\exp(x) = \exp((k+1)x)$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$. Par conséquent, par récurrence, la propriété est vraie pour tous les rangs n positifs. Si $n < 0$, on utilise la première propriété.

2 Étude de la fonction

2.1 Dérivabilité

Propriétés :

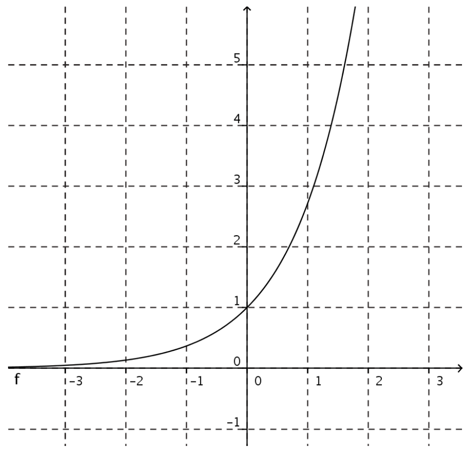
- La fonction exponentielle exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $\exp'(x) =$ ....
- la fonction exponentielle exp est ....sur $]-\infty;+\infty[$;
- la fonction exponentielle exp est .... sur $]-\infty;+\infty[$;

Preuve :
Le premier point n'est qu'une réécriture de la définition.
Pour tous les réels x et y, $f(x+y) = f(x)f(y)$ d'où pour $x =$ ....., $f(2x) =$ .... ce qui assure que $f(x)$ est strictement .... sur $]-\infty;+\infty[$.
Comme $f' = f$, on en déduit que f'.......... c'est à dire f est strictement .... sur $]-\infty;+\infty[$.

2.2 Tableau de variations

x	$-\infty$	0	...	1	...	$+\infty$
	0					

2.3 Courbe représentative



2.4 Tableau de signe

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp(x)$	....

Propriété :

Pour tous les réels x et y :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow ....$$

et

$$e^x < e^y \Leftrightarrow ....$$

3 Limites

Propriété :

$\lim_{x\to+\infty} e^x =$........ et $\lim_{x\to-\infty} e^x =$........ .

Preuve ⊙ :

- Montrons d'abord que pour tout réel x, $\exp(x) \leq x$.
  Pour cela, soit f la fonction définie par $f(x) =$ .... pour tout réel x. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) =$ ....
  $f'(x) \geq 0$ si et seulement si .... c'est à dire .... Comme $\exp(0) =$ .... et exp est .... sur $\mathbb{R}$, on déduit que pour tout $x \geq 0$, $\exp(x) \geq$ ..... et $f'(x) \geq$ .... Par conséquent, f est .... sur $[0; +\infty[$ et puisque $f(0) =$ ...., on a pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq$ ..... donc $\exp(x) - x \geq$ ..... et $\exp(x) \geq$ ....
  Comme $\lim_{x\to+\infty} x =$ ...., par comparaison on obtient $\lim_{x\to+\infty} =$ ....
- On utilise l'égalité $\exp(-x) =$............ . $\lim_{x\to-\infty}(-x) =$ .... et donc $\lim_{x\to-\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to+\infty}$ .... D'après ce qui précède $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) =$ .... donc $\lim_{x\to+\infty}$ .... = ...

Propriété :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = ...$$

que l'on traduit en disant que « la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction $x \mapsto x$ en $+\infty$ ou que $x \mapsto x$ est négligeable par rapport à l'exponentielle en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = ...$$

que l'on traduit en disant que « la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction $x \mapsto x$ en $-\infty$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = ...$$

Preuve :

- Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$. On a $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.
  On a vu précédemment (dans la démonstration de $\lim x \to +\infty e^x = +\infty$) que pour tout réel $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ donc $f''(x) \geq 0$. D'où f' est croissante sur $[0; +\infty[$. Comme $f'(0) = 1$, on déduit que f' est strictement positive sur $[0; +\infty[$ et que f est strictement croissante. Par suite, de $f(0) = 1$ on déduit que pour tout réel x, $f(x) > 0$ c'est à dire $e^x > \frac{1}{2}x^2$ et $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$. De $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ on déduit le résultat voulu.
- On remarque que $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to+\infty} (-x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{e^x} = 0$.
- exp est dérivable en 0 et le nombre dérivé en 0 est 1 donc $\lim_{x\to 0} e^x - e^0 x - 0 = \lim_{x\to 0} e^x - 1x = 1$.

4 Étude de fonctions composées avec la fonction exponentielle

Propriété :

Soit u est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = \text{............}$$

;

Cas particulier :

La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ où a est un réel fixé est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = $ .... pour tout x réel.

Propriétés :

- Si $a < 0$, alors la fonction f définie ci-dessus est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$;
- si $a > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- si $a < 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} e^{ax} = $ ..... et $\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = $ .... ;
- si $a > 0$, alors $\lim_{x\to+\infty} e^{ax} = $ ..... et $\lim_{x\to-\infty} e^{ax} = $ ......