Produit scalaire dans l'espace et applications, cours, terminale S

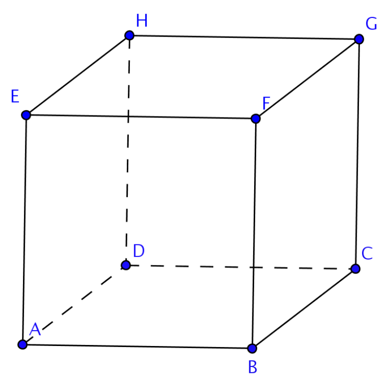
1 Produit scalaire dans l'espace

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan contenant les trois points. Alors le *produit scalaire* noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le produit scalaire .... dans le plan $(\mathcal{P})$.

Exemple :

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, $\vec{AB}.\vec{CH}$............ car $\vec{CH} = \vec{BE}$. Donc $\vec{AB}.\vec{CH}$ .... par projection orthogonale de E sur (AB) dans le plan (ABE).



Propriétés :

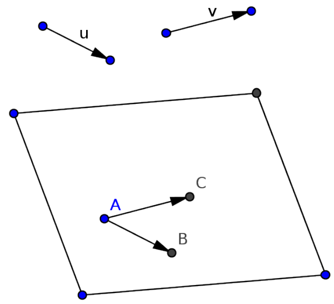
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$.

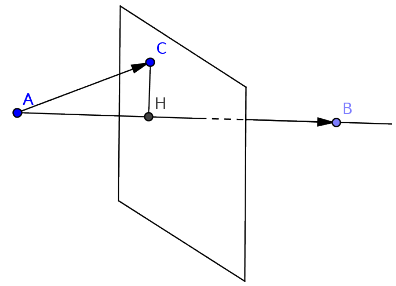
- Alors dans un plan $\mathcal{P}$ contenant les trois points :

$$\vec{u}.\vec{v} = ...$$

- Soit H le *projeté orthogonal* de C sur la droite (AB) c'est à dire le point d'intersection de la droite (AB) avec la droite orthogonale à (AB) passant par C, alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = ...$$





Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace (c'est à dire que les axes sont deux à deux perpendiculaires et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont une norme égale à 1). Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Propriétés :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un réel.
- $\vec{u}.\vec{v} =$ ...... ;
- $(k\vec{u}).\vec{v} =$ ...... ;
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) =$ .... ;

Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace .
- Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a;b;c)$ a pour norme $\|\vec{u}\| =$.................. ;
- Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points. La distance AB de A à B est donnée par :

$$AB = \text{..................}$$

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits *orthogonaux* si $\vec{u}$.... ou $\vec{v}$.... ou si les droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ....

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ....
.

2.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Propriété et définition :

> Une droite (d) est orthogonale à toutes les droites d'un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si elle est orthogonale .... On dit alors qu'elle est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

Preuve $\odot$ **:**
Il est évident que si la droite (d) est orthogonale à toutes les droites du plan $(\mathcal{P})$, alors elle est en particulier orthogonale aux droites (d_1) et (d_2) du plan.

Montrons la réciproque. Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2) respectivement. Soi $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d). Alors pour toute droite (d_3) du plan, soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de (d_3). $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ sont des vecteurs directeurs du plan $(\mathcal{P})$ et $\vec{w}$ leur est coplanaire donc il existe deux réels a et b tels que $\vec{w}$......................... Par ailleurs, $\vec{u}.\vec{u_1}$ =......... et $\vec{u}.\vec{u_2}$......... car .... Donc $\vec{u}.\vec{w}$................... .... donc (d) est orthogonale à (d_3). Ceci étant valable pour toute droite (d_3) du plan, la propriété est bien vraie.

2.3 Vecteur normal à un plan

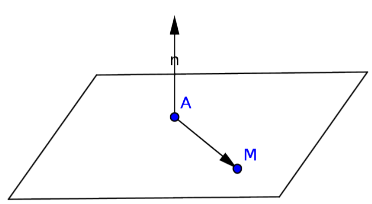
Définition :

> Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $(\mathcal{P})$ lorsque ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite ....

Exemple :
Soient $A(1;1;4)$, $B(-1;1;2)$ et $C(2;2;8)$ trois points et $\vec{u}(1;3;-1)$ un vecteur.
$\vec{AB}$ a pour coordonnées .... et $\vec{AC}$ a pour coordonnées .... Ils ne sont de manière évidente par colinéaires et définissent donc un plan (ABC). Étudions si le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).
D'une part $\vec{u}.\vec{AB}$.............. .... donc $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux.
D'autre part, $\vec{u}.\vec{AC}$............... .... donc $\vec{u}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.
Par conséquent, $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, il est donc orthogonal à tout vecteur du plan, c'est à dire qu'il est normal au plan.

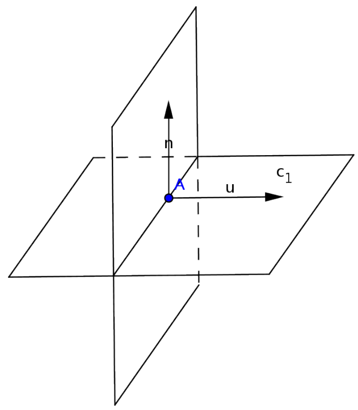
Propriété :

> Soit $(\mathcal{P})$ un plan, A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.Le plan est l'ensemble des points M tels que ....



Définition :

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ des plans et $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ des vecteurs normaux à ces deux plans respectivement. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont dits *perpendiculaires* si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont ....



3 Application à la géométrie analytique

Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormal.
- Soit $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$. Un point $M(x;y;z)$ appartient à $(\mathcal{P})$ si et seulement si .... avec d un réel fixé. Cette équation est appelée *équation cartésienne* du plan $(\mathcal{D})$.
- Réciproquement, soient a, b, c et d des réels avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$. Alors l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y;z)$ tels que .... est un plan de vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées ....

Preuve ⊙ :
- Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point du plan $(\mathcal{P})$.
$M(x;y;z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n} = 0$ équivaut à .... ce qui montre que la relation $ax + by + cz + d = 0$ caractérise le plan $(\mathcal{P})$.
- On peut supposer $a \neq 0$, la démonstration serait identique dans les cas $b \neq$ ou $c \neq$. Le point $A(\frac{-d}{a};0;0)$ est un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ cherché. Soit $M(x;y;z)$ un autre point de $\mathcal{E}$. Alors .... et $-\frac{d}{a}a + 0b + 0c + d =$.... donnent $a(x + \frac{d}{a}) + by + cz =$..... ce qui équivaut à $\vec{AM}.\vec{n} =$..... avec $\vec{n}$ de coordonnées $(a;b;c)$. $\mathcal{E}$ est donc bien le plan passant par A et de vecteur normal ....