Produit scalaire dans l'espace et applications, cours, terminale S

F.Gaudon

27 avril 2017

Table des matières

1 Distance dans un repère orthonormé de l'espace

Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace c'est à dire que les axes sont deux à deux orthogonaux en O et les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont une norme égale à 1.

- Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points. La distance AB de A à B est donnée par :

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}$$

- Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a;b;c)$ a pour norme

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

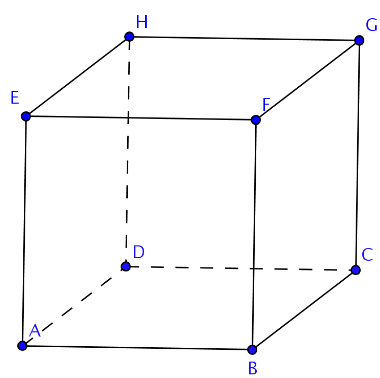
2 Produit scalaire dans l'espace

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{AC}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan contenant les trois points. Alors le *produit scalaire* noté $\vec{u}.\vec{v}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$ dans le plan $(\mathcal{P})$.

Exemple :

Dans le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 ci-dessous, $\vec{AB}.\vec{CH}=\vec{AB}.\vec{BE}$ car $\vec{CH}=\vec{BE}$
D'où $\vec{AB}.\vec{CH}=AB\times BE\times\cos(\vec{AB};\vec{BE})=1\times\sqrt{2}\times\cos(\pi+\frac{\pi}{4})=1\times(-\cos(\frac{\pi}{4}))=\sqrt{2}\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-1.$



Propriétés :

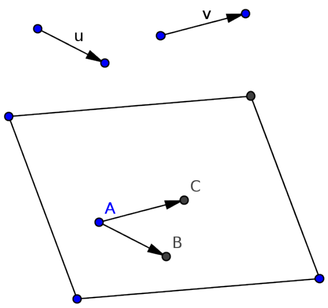
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$.

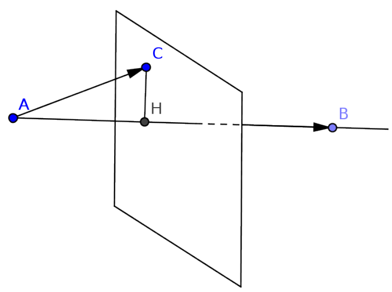
- Alors dans un plan $\mathcal{P}$ contenant les trois points :

$$\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos((\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}))$$

- Soit H le *projeté orthogonal* de C sur la droite (AB) dans le plan (ABC) c'est à dire le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan orthogonal à (AB) passant par C, alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{AB}.\vec{AH}$$





Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Preuve :
Admise

Propriétés :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un réel.

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;
- $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$;
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.

Preuve :
Vérifications immédiates par des calculs sur les coordonnées.

Remarque et rappel de notation :
$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$ et $AB^2 = \vec{AB}.\vec{AB} = \vec{AB}^2$

3 Orthogonalité dans l'espace

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont dits *orthogonaux* si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou si les droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales.

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

3.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Propriété et définition :

Une droite (d) est orthogonale à toutes les droites d'un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan. On dit alors qu'elle est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

Preuve $\odot$ **:**

- Il est évident que si la droite (d) est orthogonale à toutes les droites du plan $(\mathcal{P})$, alors elle est en particulier orthogonale aux droites (d_1) et (d_2) du plan.
- Montrons la réciproque.
  Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ des vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2) respectivement. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d).
  Pour toute droite (d_3) du plan, soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de (d_3).
  $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ sont des vecteurs directeurs du plan $(\mathcal{P})$ et $\vec{w}$ leur est coplanaire, donc il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2}$.
  (d) est orthogonale à (d_1) et à (d_2) donc $\vec{u}.\vec{u_1} = 0$ et $\vec{u}.\vec{u_2} = 0$
  D'où $\vec{u}.\vec{w} = \vec{u}.(a\vec{u_1} + b\vec{u_2}) = a\vec{u}.\vec{u_1} + b\vec{u}.\vec{u_2} = 0$.
  c'est à dire que (d) est orthogonale à (d_3).
  Ceci étant valable pour toute droite (d_3) du plan, la propriété est bien vraie.

3.3 Vecteur normal à un plan

Définition :

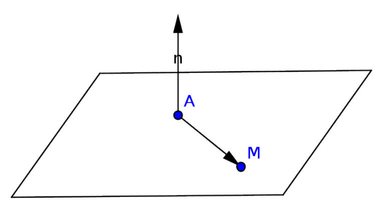
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $(\mathcal{P})$ lorsque ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

Exemple : démontrer qu'un vecteur est normal à un plan :

Soient $A(1;1;4)$, $B(-1;1;2)$ et $C(2;2;8)$ trois points et $\vec{u}(1;3;-1)$ un vecteur.
$\vec{AB}$ a pour coordonnées $(-2;0;-2)$ et $\vec{AC}$ a pour coordonnées $(1;1;4)$. Ils ne sont de manière évidente pas colinéaires et définissent donc un plan (ABC).
Étudions si le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC).
D'une part $\vec{u}.\vec{AB} = 1 \times (-2) + 3 \times 0 + (-1) \times (-2) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux.
D'autre part, $\vec{u}.\vec{AC} = 1 \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 4 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.
Par conséquent, $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, il est donc orthogonal à tout vecteur du plan, c'est à dire qu'il est normal au plan.

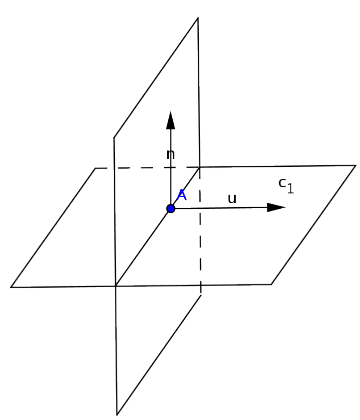
Propriété :

Soit $(\mathcal{P})$ un plan, A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$.Le plan est l'ensemble des points M tels que $\vec{AM}.\vec{n} = 0$.



Définition :

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ des plans et $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ des vecteurs normaux à ces deux plans respectivement. $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ sont dits *perpendiculaires* si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux.



4 Application à la géométrie analytique

Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère orthonormal.

- Soit $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$. Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à $(\mathcal{P})$ si et seulement $ax+by+cz+d=0$ où d est un réel fixé. Cette équation est appelée *équation cartésienne* du plan $(\mathcal{D})$.
- Réciproquement, soient a, b, c et d des réels avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$. Alors l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a;b;c)$.

Preuve $\odot$ **:**

- Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point du plan $(\mathcal{P})$.
  $M(x;y;z)\in(\mathcal{P})\Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n}=0\Leftrightarrow(x-x_A)a+(y-y_A)b+(z-z_A)c=0\Leftrightarrow ax+by+cz+(-ax_A+by_A+cz_A)=0$ ce qui montre que la relation $ax+by+cz+d=0$ caractérise le plan $(\mathcal{P})$.
- On peut supposer $a\neq 0$, la démonstration serait identique dans les cas où $b\neq$ ou $c\neq$. Le point $A(\frac{-d}{a};0;0)$ est un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ cherché. Soit $M(x;y;z)$ un autre point de $\mathcal{E}$. Alors $ax+by+cz+d=0$ et $-\frac{d}{a}a+0b+0c+d=0$ donnent $a(x+\frac{d}{a})+by+cz=0$ ce qui équivaut à $\vec{AM}.\vec{n}=0$ où $\vec{n}$ a pour coordonnées $(a;b;c)$. $\mathcal{E}$ est donc bien le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.