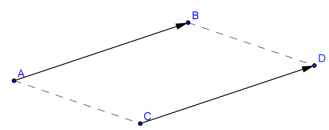
Géométrie vectorielle et repérage dans l'espace, terminale S

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Extension de la notion de vecteur à l'espace

Définition :

Á tout couple de points $(A; B)$ de l'espace, on associe le vecteur $\vec{AB}$ tel que si A et B ne sont pas confondus, dans un plan qui contient A et B, $\vec{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en B. Si A et B sont confondus, le vecteur $\vec{AA}$ est le . . . . noté . . . .



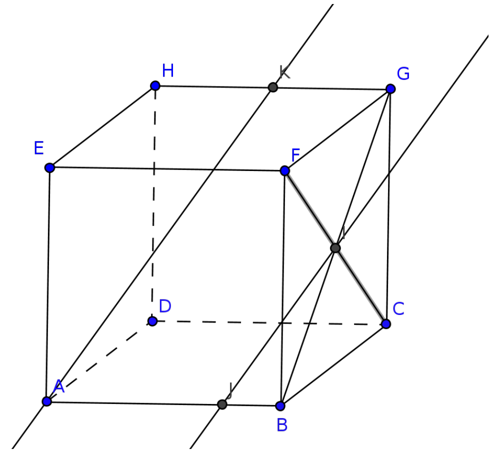
Propriété :

- Pour tout point A de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que . . . .
- A, B, C et D quatre points de l'espace. $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si . . . .
- Les règles de calculs sur les vecteurs du plan restent valables dans l'espace.
- La notion de colinéarité reste valable dans dans l'espace c'est à dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si . . . .

Exemple :

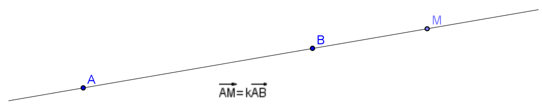
On considère un cube $ABCDEFG$ et les points I, J et K tels que I et le centre de la face BCGF, K est le milieu de [HG] et $vecBJ = \frac{1}{4}\vec{BA}$. On va montrer que (AK) et (IJ) sont parallèles.

On a
$\vec{AK} = ...$
$= ...$
$= ...$
$= ...$
d'une part et
$\vec{JI} = ...$
$= ....$
d'autre part.
Donc $\vec{AK} = ...\vec{JI}$ et les vecteurs $\vec{AK}$ et $\vec{JI}$ sont . . . . et les droites (AK) et (IJ) sont . . . .



Propriété :

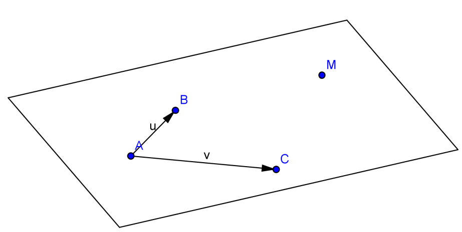
Soient A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel k vérifiant . . . .



1.2 Coplanarité

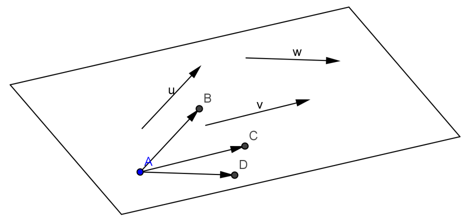
Propriété :

A, B et C sont trois points de l'espace non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels qu'il existe a et b réels vérifiant . . . .
On dit alors que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ . . . . le plan ou qu'ils sont des . . . . du plan (ABC)



Définition :

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* si les points A, B, C et D de l'espace qui vérifient $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ et $\vec{w} = \vec{AD}$ . . . .



Propriété :

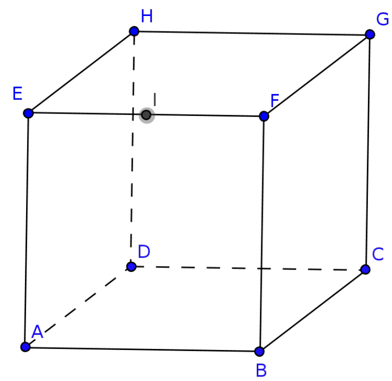
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que . . . . ou si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont . . . .

Remarque :

Si deux plans sont dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires, alors . . . .

Exemple :

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[EF]$. On va montrer que $\vec{GC}$, $\vec{FE}$ et $\vec{AI}$ sont coplanaires :



On a

$$\begin{aligned}\vec{AI} &= ...\\ &= ...\\ &= ...\vec{GC} + ...\vec{FE}\end{aligned}$$

donc les vecteurs sont coplanaires.

2 Géométrie analytique dans l'espace

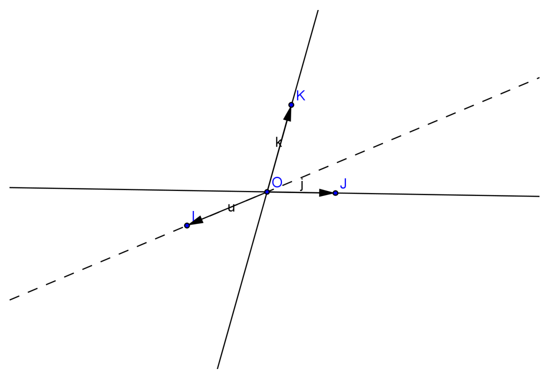
2.1 Repérage dans l'espace

Définition :

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires. On note alors . . . . ce repère.

Propriété et définition :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ appelé coordonnées du point M de réels tels que $\vec{OM} =$. . . . .
x est . . . ., y est . . . . et z est la . . . . du point M dans ce repère.



Propriété :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace, $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points.
Alors :

- Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées . . . .
- le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées . . . . . .
- Le centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées . . . .

2.2 Équations paramétriques dans l'espace

Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace. Soit d une droite de l'espace passant par un point A de coordonnées $(x_A;y_A;z_A)$ et admettant le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a;b;c)$ pour vecteur directeur.
Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à la droite d si et seulement si il existe un réel t tel que . . . . c'est à dire si et seulement si

...

...

...

Ce système est appelé . . . . de la droite d et t est appelé . . . . de cette représentation.

Exemple :

Soit A le point de coordonnées $(1;-4;3)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(5;1;-2)$. Alors la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

...

...

...

c'est à dire qu'un point $M(x;y;z)$ appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées $(x;y;z)$ vérifient le système précédent.

Remarque :

La représentation paramétrique d'une droite .... unique.

Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace. Soit $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace contenant un point A et dirigé par deux vecteurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ non colinéaires.
Un point M de coordonnés $(x;y;z)$ appartient au plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que . . . . c'est à dire si et seulement si

...

...

...

Ce système constitue une . . . . du plan $(\mathcal{P})$. t et t' en sont les . . . .