Géométrie vectorielle et analytique dans l'espace, cours, terminale S

F.Gaudon

3 avril 2017

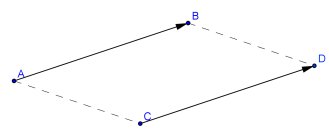
Table des matières

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Extension de la notion de vecteur à l'espace

Définition :

Á tout couple de points $(A; B)$ de l'espace, on associe le vecteur $\vec{AB}$ tel que si A et B ne sont pas confondus, dans un plan qui contient A et B, $\vec{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en B. Si A et B sont confondus, le vecteur $\vec{AA}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$.

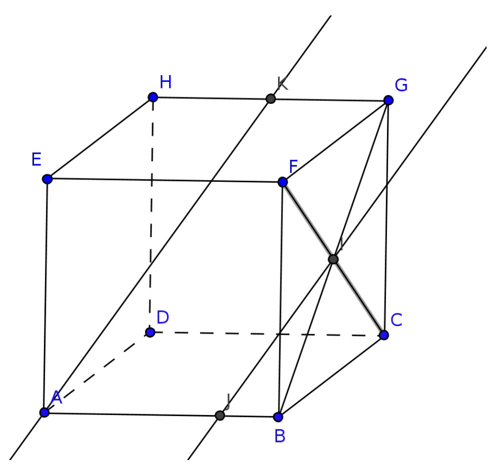


Propriété :

- Pour tout point A de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\vec{AB} = \vec{u}$.
- A, B, C et D quatre points de l'espace. $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
- Les règles de calculs sur les vecteurs du plan restent valables dans l'espace.
- La notion de colinéarité reste valable dans dans l'espace c'est à dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple :

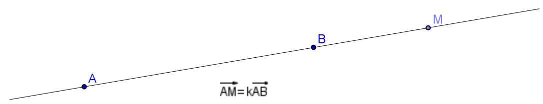
On considère un cube $ABCDEFG$ et les points I, J et K tels que I et le centre de la face BCGF, K est le milieu de [HG] et $vecBJ = \frac{1}{4}\vec{BA}$. On va montrer que (AK) et (IJ) sont parallèles.



On a $\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GK} = \vec{AB} + \vec{BG} - \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BG}$ d'une part et $\vec{JI} = \vec{JB} + \vec{BI} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BG}$ d'autre part. Donc $\vec{AK} = 2\vec{JI}$ et les vecteurs $\vec{AK}$ et $\vec{JI}$ sont colinéaires et les droites (AK) et (IJ) sont parallèles.

Propriété :

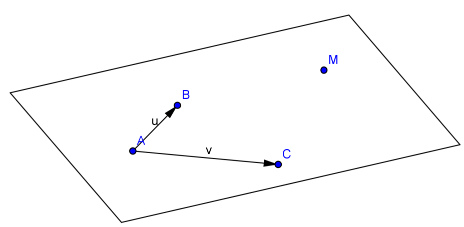
Soient A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel k vérifiant $\vec{AM} = k\vec{AB}$.



1.2 Coplanarité

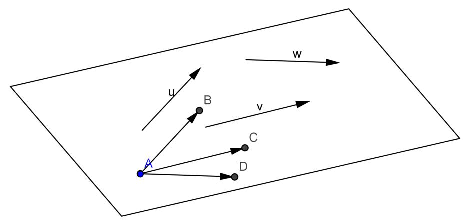
Propriété :

A, B et C sont trois points de l'espace non alignés. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels qu'il existe a et b réels vérifiant $\vec{AM} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$.
On dit alors que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ dirigent le plan ou qu'ils sont des *vecteurs directeurs* du plan (ABC)



Définition :

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont *coplanaires* si les points A, B, C et D de l'espace qui vérifient $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$ et $\vec{w} = \vec{AD}$ appartiennent au même plan.

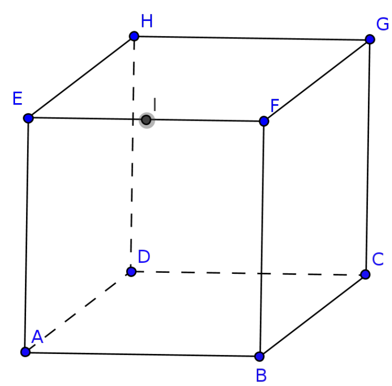


Propriété :

> Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ou si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque :
Si deux plans sont dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires, alors ils sont parallèles.

Exemple :
$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[EF]$. On va montrer que $\vec{GC}$, $\vec{FE}$ et $\vec{AI}$ sont coplanaires :



On a $\vec{AI} = \vec{AE} + \vec{EI} = \vec{CG} + \frac{1}{2}\vec{EF} = -\vec{GC} - \frac{1}{2}\vec{FE}$ donc les vecteurs sont coplanaires.

Exemple : démonstration du théorème du toit :
Rappelons l'énoncé du théorème : (d_1) et (d_2) sont deux droites parallèles, $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont deux plans distincts tels que (d_1) est contenue dans $(\mathcal{P}_1)$ et (d_2) est contenue dans $(\mathcal{P}_2)$. Si $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants, alors la droite d'intersection Δ est parallèle à (d_1) et à (d_2).
Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d_1) et de (d_2). Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
On considère un couple $(\vec{u}; \vec{v_1})$ de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_1$ et $(\vec{u}; \vec{v_2})$ un couple de vecteurs directeur de $\mathcal{P}_\in$.
La droite Δ est contenue dans $\mathcal{P}_1$ donc il existe un couple de réels $(x_1; y_1)$ tel que $\vec{w} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v_1}$.
De même, Δ étant contenue dans $\mathcal{P}_2$, il existe un couple $(x_2; y_2)$ tel que $\vec{w} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v_2}$.
Avec les égalités précédentes, on obtient $x_1\vec{u} + y_1\vec{v_1} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v_2}$ soit $(x_1 - x_2)\vec{u} = y_2\vec{v_2} - y_1\vec{v_1}$.
Si $x_1 \neq x_2$, alors $\vec{u}$,$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont colinéaires ce qui serait contraire à l'hyothèse $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont distincts.
Donc $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2 = 0$ car $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires.
En conclusion, $\vec{w} = x_1\vec{u}$ et Δ est parallèle à d_1 et d_2.

2 Géométrie analytique dans l'espace

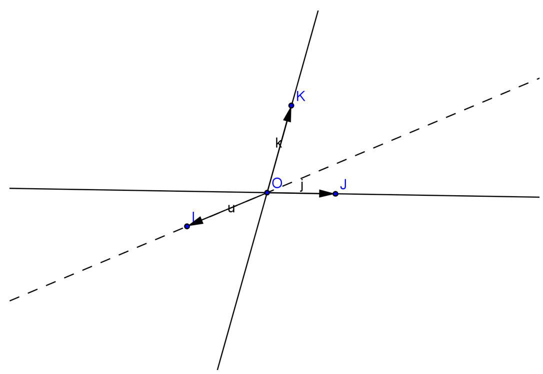
2.1 Repérage dans l'espace

Définition :

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et de trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires. On note alors $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ce repère.

Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ appelé coordonnées du point M de réels tels que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
x est *l'abscisse*, y est *l'ordonnée* et z est la *cote* du point M dans ce repère.



Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace, $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points.
Alors :

- Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$;
- le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$;
- Le centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

2.2 Équations paramétriques dans l'espace

Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace. Soit d une droite de l'espace passant par un point A de coordonnées $(x_A;y_A;z_A)$ et admettant le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a;b;c)$ pour vecteur directeur.
Un point M de coordonnées $(x;y;z)$ appartient à la droite d si et seulement si il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$ c'est à dire si et seulement si

$$\begin{cases} x &= x_A + ta \\ y &= y_A + tb \\ z &= z_A + tc \end{cases}$$

Ce système est appelé *représentation paramétrique* de la droite d et t est appelé *paramètre* de cette représentation.

Exemple :
Soit A le point de coordonnées $(1;-4;3)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(5;1;-2)$. Alors la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation parramétrique :

$$\begin{cases} x &= 1 + 5t \\ y &= -4 + t \\ z &= 3 - 2t \end{cases}$$

c'est à dire qu'un point $M(x;y;z)$ appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées $(x;y;z)$ vérifient le système précédent.

Remarque :
Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique.

Propriété et définition :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ un repère de l'espace. Soit $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace contenant un point A et dirigé par deux vecteurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ non colinéaires.
Un point M de coordonnés $(x;y;z)$ appartient au plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que $\vec{AM} = tvecu + t'\vec{v}$ c'est à dire si et seulement si

$$\begin{cases} x = &= x_A + ta + t'a' \\ y &= y_A + ta + t'a' \\ z &= z_A + ta + t'a' \end{cases}$$

Ce système constitue une *représentation paramétrique* du plan $(\mathcal{P})$. t et t' en sont les paramètres.