Parallélisme et orthogonalité dans l'espace - cours - Terminale S

F.Gaudon

4 février 2017

Table des matières

1 Rappels sur les positions relatives d'objets de l'espace

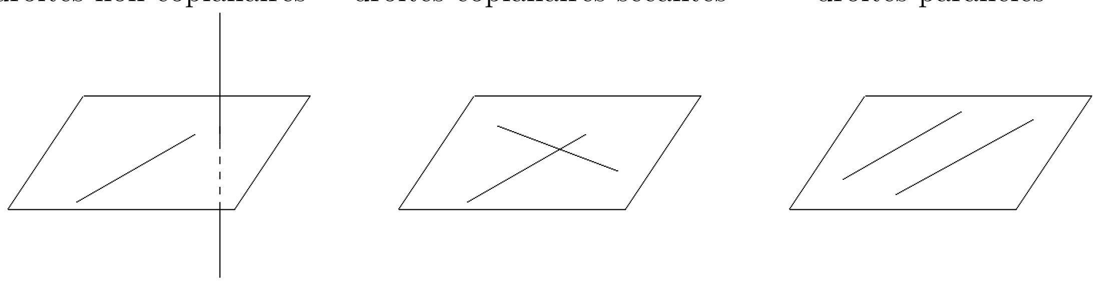
1.1 Droites de l'espace

Définition :

Deux droites de l'espace sont dites :
- *coplanaires* si elles sont contenues dans le même plan.
- *parallèles* si elles sont contenues dans le même plan et si elles sont parallèles dans ce plan.

Propriété :
Soient $(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes. Les configurations suivantes sont les seules possibles :

droites non coplanaires — droites coplanaires sécantes — droites parallèles



Remarque :
Deux droites non coplanaires n'ont donc aucun point commun et ne sont pourtant pas non plus parallèles.

1.2 Plans de l'espace

Définition :

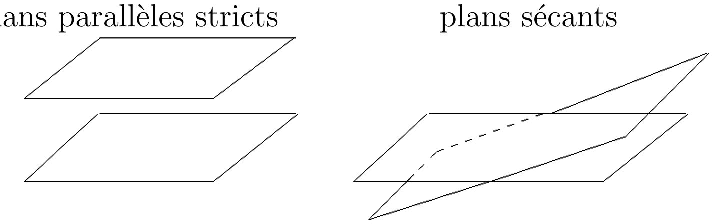
Deux *plans* sont *parallèles* si ils n'ont aucun point commun.

Propriété :

Deux plans sécants se coupent selon une droite.

Propriété :
Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans distincts. Les configurations suivantes sont les seules possibles :

plans parallèles stricts — plans sécants



1.3 Droites et plans dans l'espace

Définition :

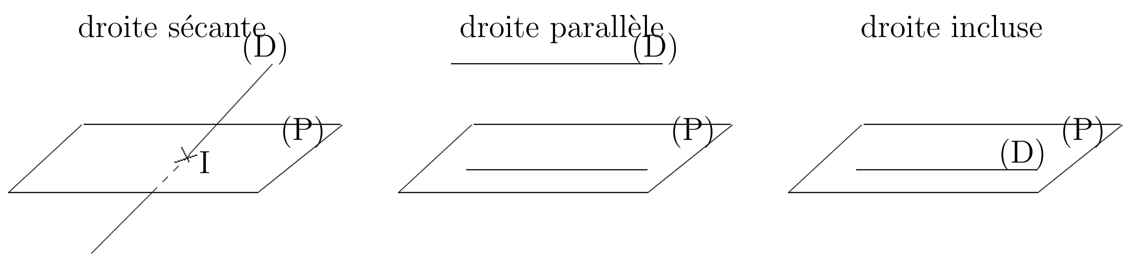
> Une *droite* est *parallèle à un plan* si elle n'a aucun point commun avec ce plan.

Remarque :
On a vu précédemment que deux droites qui n'ont aucun point commun ne sont pas nécessairement parallèles.

Propriété :

> Une droite $(\mathcal{D})$ de l'espace est parallèle à un plan si et seulement si le plan contient une droite qui lui est parallèle.

Synthèse :



$(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D}) = \{I\}$ $\quad$ $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D}) = \emptyset$ $\quad$ $(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D}) = \mathcal{D}$

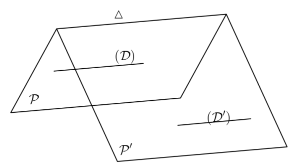
Propriété :

> Deux plans sont parallèles si l'un contient deux droites sécantes parallèles à l'autre.

2 Parallélisme

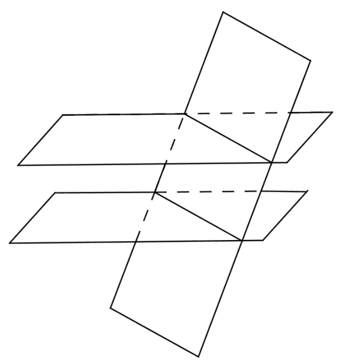
Théorème « du toit » :

Si deux plans sécants $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ contiennent deux droites parallèles $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, alors leur intersection Δ est parallèle aux droites $(\mathcal{D})$ et $\mathcal{D}'$.

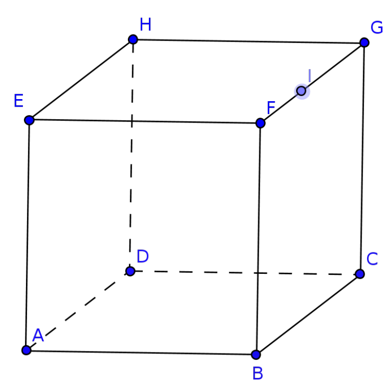


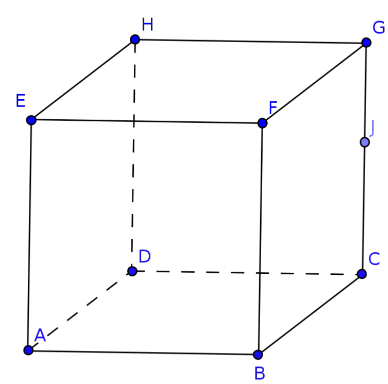
Propriété :

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



Exemples :





- Recherche de l'intersection de (ABI) et (DCI) :
  (AB) et (DC) sont parallèles. (AB) est incluse dans (ABI). (DC) est incluse dans (DCI). D'où (ABI) et (DCI) sont sécantes selon la droite parallèle passant par I d'après le théorème du toit.
- Recherche de l'intersection de (ABJ) et (DCG) :
  (ABF) est parallèle à (DCG). (ABJ) coupe (ABF) selon la droite (AB) donc (ABJ) coupe (DCF) selon la droite parallèle à (AB) passant par J.

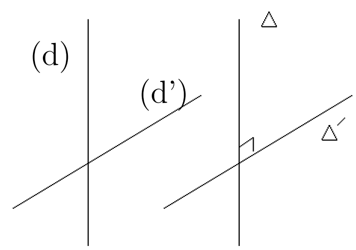
3 Orthogonalité

Définition :

Deux *droites sont orthogonales* si et seulement si les droites parallèles à ces droites passant par un même point sont deux droites perpendiculaires.

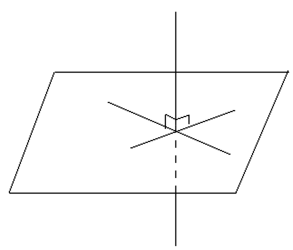
Remarque :

Deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement perpendiculaires.



Définition :

Une *droite est orthogonale à un plan* lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Propriété :

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.