Matrices, terminale ES spécialité

F.Gaudon

19 novembre 2013

Table des matières

1 Notion de matrice

Définitions :

- Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Une *matrice* de *dimension* $n \times p$ est un tableau de nombres de n lignes et p colonnes. On note ces nombres à l'aide de parenthèses :

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 5 \\ 4 & b & 1 \end{pmatrix}$$

- Une *matrice ligne* est une matrice n'ayant qu'une seule ligne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Une *matrice colonne* est une matrice n'ayant qu'une seule colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Une *matrice carrée* est une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes.
- Une matrice *diagonale* est une matrice carrée dont tous les termes sont nuls en dehors de la diagonale.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Produit d'une matrice par une matrice colonne

Définition :

Soit A une matrice à p lignes et n colonnes et B une matrice colonne à n lignes.
Pour calculer le produit de A par B noté AB : pour chaque ligne de A, on multiplie le premier élément de la ligne de A par le premier élément de B, puis le deuxième élément de la ligne de A par le deuxième élément de B, et ainsi de suite jusqu'à au dernier. Puis on les ajoute.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Exemples :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + 5 \times 6 + 3 \times 7 = 4 + 30 + 21 = 55$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 4 + 2 \times 6 + 8 \times 2 \\ 3 \times 4 + 4 \times 6 + 7 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 + 12 + 16 \\ 12 + 24 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 50 \end{pmatrix}$$

2.2 Produit de deux matrices

Définition :

Le produit d'un matrice A de dimension $m \times p$ par une matrice B de dimension $p \times n$ est la matrice C notée $A \times B$ de dimension $m \times n$ telle que la colonne j est le produit de la matrice A par la colonne j de la matrice B.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 5 & 5 \times 7 + 2 \times 4 + 3 \times 1 \\ 4 \times 1 + 2 \times 1 + 4 \times 5 & 4 \times 7 + 4 + 4 \times 1 \\ 6 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 5 & 6 \times 7 + 3 \times 4 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 46 \\ 26 & 36 \\ 17 & 55 \end{pmatrix}$$

Remarque :
Attention $A \times B \neq B \times A$.

2.3 Matrice inverse

Définition :

La matrice *unité* d'ordre n notée I_n avec n entier naturel non nul est la matrice carrée d'ordre n diagonale dont tous les termes de la diagonale sont égaux à 1.

Exemple :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété et définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre n alors $A \times I_n = I_n \times A = A$. La *matrice inverse* de A, s'il elle existe, est la matrice notée A^{-1} telle que

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

.

Exemple :
Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

alors A^{-1} existe et vaut :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -1,5 & 2 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut en effet vérifier que $AA^{-1} = I_3$ et $A^{-1}A = I_3$.

2.4 Somme et produit d'une matrice par un réel

Définitions :

Soient A et B deux matrices ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Soit k un réel.
- La somme $A+B$ des deux matrices s'obtient en ajoutant chaque terme de A au terme correspondant de B.
- La différence $A-B$ s'obtient en enlevant à chaque terme de A le terme correspondant de B.
- L'opposée $-A$ d'une matrice s'obtient en remplaçant chacun de ses termes par son opposé.
- kA est la matrice obtenue en multipliant chaque terme de A par k.

Propriété :

A, B et C désignent des matrices ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. k et k' sont deux réels. On a :
- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + k')A = kA + k'A$
- $k(k'A) = (kk')A$

3 Application à la résolution de systèmes

Exemple :
On cherche une fonction f telle que pour tout x réel $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels fixés et telle que sa courbe représentative passe par les points $A(0;1)$, $B(1;2)$ et $C(2;7)$.

On a donc le système

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 2 \\ f(2) = 7 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} a \times 0^2 + b \times 0 + c = 1 \\ a \times 1^2 + b \times 1 + c = 2 \\ a \times 2^2 + b \times 2 + c = 7 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} 0a + 0b + 1c = 1 \\ 2a + 1b + 1c = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases}$$

En posant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

le système s'écrit :

$$AX = B$$

D'où

$$X = A^{-1}B$$

donc

$$X = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -1,5 & 2 & -0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

Méthode :

Dans la résolution d'un système de n équations à n inconnues :

- La matrice A des coefficients du système est une matrice carrée d'ordre n ;
- La matrice X des inconnues est une matrice colonne à n lignes ;
- la matrice B des seconds membres est une matrice colonne à n lignes.

La recherche des coefficients de la fonction polynomiale f se traduit par un système qui s'écrit sous forme d'une équation matricielle :

$$A \times X = B$$

Si la matrice inverse de la matrice A existe, alors la fonction f existe et ses coefficients sont obtenus par

$$X = A^{-1}B$$