

Graphes, terminale ES spécialité

F.Gaudon

28 juin 2014

Table des matières

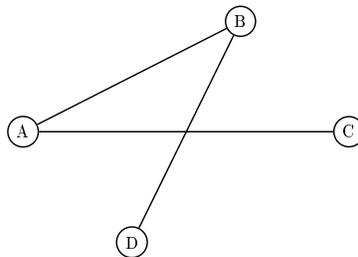
1	Généralités	2
2	Chaînes et cycles	3
3	Matrice d'adjacence d'un graphe	4
4	Graphes étiquetés et graphes pondérés	4
5	Graphes probabilistes	5

1 Généralités

Définition :

- Un *graphe* est un ensemble de *sommets* pouvant être reliés par des *arêtes*.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits *adjacents*.
- *L'ordre* d'un graphe est le nombre de sommets.
- Une *boucle* est une arête reliant un sommet à lui-même.
- *Le degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.
- Un graphe est dit *simple* s'il ne comporte pas de boucle et tel qu'entre deux sommets, il y ait au plus une arête.

Exemple :



Graphe simple

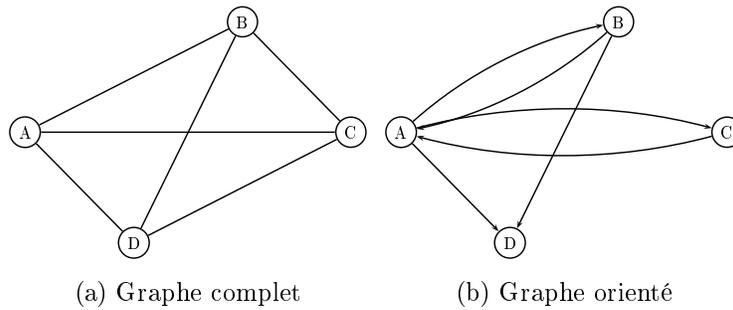
Propriété :

Dans un graphe la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

Définitions :

- Un graphe est dit *complet* si tous ses sommets sont adjacents.
- Un sous-graphe est un graphe composé de certains de ces sommets ainsi que de toutes les arêtes qui les relient.
- Un graphe est dit *orienté* si ses arêtes ont un sens de parcours. On parle alors *d'origine* et *d'extrémité* d'une arête.

Exemples :



2 Chaînes et cycles

Définitions :

- Une *chaîne* est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit adjacent au suivant.
- Un graphe est dit *connexe* si toute paire de sommets peut être reliée par une chaîne.
- Une *chaîne eulérienne* est une chaîne contenant toutes les arêtes du graphe, chacune prise une seule fois.
- Un *cycle* est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes et dont les arêtes n'apparaissent qu'une seule fois.
- Un cycle est dit *cycle eulérien* si il est formé de toutes les arêtes du graphe, chacune prise une seule fois.

Théorème d'Euler :

Soit G un graphe connexe.

- G admet une chaîne eulérienne si et seulement si G admet exactement deux sommets de degrés impairs.
- G admet un cycle eulérien si et seulement si G ne possède que des sommets de degrés pairs.

Définition :

- La *longueur* d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la constituent.
- Dans un graphe connexe,
 - la distance entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne qui relie ces deux sommets.
 - le diamètre du graphe est la plus grande distance entre deux sommets.

3 Matrice d'adjacence d'un graphe

Définition :

Soit G un graphe dont les sommets sont numérotés de 1 à n avec $n \in \mathbb{N}^*$. La *matrice d'adjacence* de G est une matrice carrée d'ordre n , remplie de sorte que le coefficient $a_{i,j}$ situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j soit le nombre d'arêtes partant du sommet numéro i au sommet numéro j .

Propriétés :

- La matrice d'adjacence d'un graphe simple ne comporte que des 0 et des 1.
- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

Remarques :

- Dans un graphe non orienté, la somme des termes d'une ligne (ou d'une colonne) donne le degré du sommet correspondant.
- La matrice dont tous les coefficients (sauf éventuellement ceux de la diagonale) sont égaux à 1 est la matrice d'adjacence d'un graphe complet.

Théorème :

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G et p un entier naturel non nul. Dans la matrice M^p , le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est égal au nombre de chaînes de longueur p d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j .

4 Graphes étiquetés et graphes pondérés

Définition :

Un graphe *étiqueté* est un graphe orienté dont chaque arête est affectée d'une étiquette pouvant être des nombres, des lettres ou des symboles. Ils peuvent en outre comporter un sommet de début et un sommet de fin.

Définition :

Un graphe *pondéré* est un graphe étiqueté dont les arêtes sont affectées de nombres positifs appelés *poids*.

Définitions :

- Dans un graphe pondéré, le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes constituant la chaîne.
- Une plus courte chaîne entre deux sommets est, parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimal.

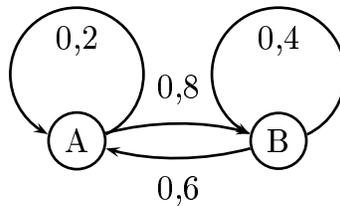
5 Graphes probabilistes

Définitions :

Un *graphe probabiliste* est un graphe orienté et pondéré tel que :

- pour chaque sommet, la somme des poids des arêtes issues de ce sommet est égale à 1 ;
- le poids de l'arête allant du sommet I au sommet J est la probabilité conditionnelle d'obtenir J à l'étape $n + 1$ sachant que l'on a obtenu I à l'étape n .

Exemple :



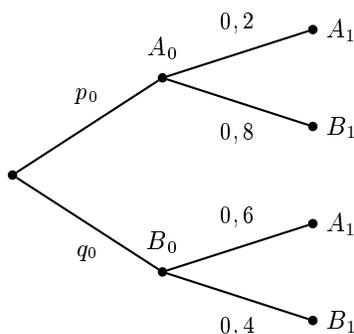
Exemple de graphe probabiliste

Définitions :

- *L'état probabiliste* d'un système est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles. Cette loi est représentée par une matrice ligne dont la somme des termes vaut 1.
- La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est la matrice carrée d'ordre n où le terme figurant en ligne i et colonne j est égal au poids de l'arête allant de i vers j si cette arête existe ou à 0 sinon.

Exemple :

Pour le graphe ci-dessus, soit $(p_0; q_0)$ est l'état probabiliste initial. Alors, après une étape, on peut déterminer l'état probabiliste en utilisant l'arbre suivant :



On obtient $P_1 = (p_1; q_1) = (0, 2p_0 + 0, 6q_0; 0, 8p_0 + 0, 4q_0)$.

La matrice de transition est :

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Propriété :

Soit M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, P_0 la matrice décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste à l'étape n , alors $P_n = P_0 \times M^n$.

Propriété et définition :

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition M ne comporte pas de 0, l'état probabiliste P_n à l'étape n converge vers un état P indépendant de l'état initial P_0 . De plus, P vérifie $P = P \times M$. On dit que P est *l'état stable* du graphe probabiliste.