Fonctions, généralités. Classe de première STG

F.Gaudon

10 juin 2006

Table des matières

1 Notions de fonction. Images et antécédents

1.1 Point de vue algébrique

Définition :

Une *fonction* f est un procédé qui, à tout nombre x d'un ensemble I de nombres réels « de départ »associe un nombre noté $f(x)$.

- I est *l'ensemble de définition* de f ;
- $f(x)$ est *l'image* du nombre x par la fonction f ;
- x est *l'antécédent* de $f(x)$.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - 5$ pour tout x réel. On a $f(-3) = 2 \times (-3) - 5 = -11$. -11 est l'image de -3 par f et -3 est un antécédent de -11 par f.

Remarque :

Pour toute fonction f, un nombre x a une et une seule image par f. Par contre, tout nombre n'a pas d'antécédent par f ou peut en avoir plusieurs. Par exemple, si f est la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$, 3 a pour unique image 9 par f mais 9 a deux antécédents qui sont -3 et 3 par f.

1.2 Point de vue graphique

Propriété :

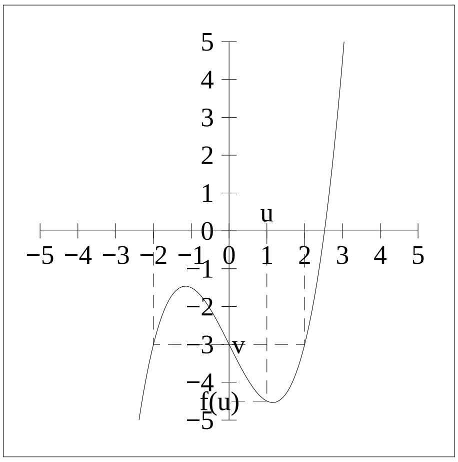
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f.

- L'image $f(u)$ d'un nombre u par f se lit sur l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec la droite d'équation $x = u$;
- les antécédents s'il y en a de tout nombre v par f se lisent sur l'axe des abscisses : ce sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\rfloor$ avec la droite d'équation $y = v$.

Exemple :

Sur la courbe ci-dessous représentant une fonction f,

- l'image de 1 est -4,5 ;
- -3 a trois antécédents qui sont -2, 0 et 2.



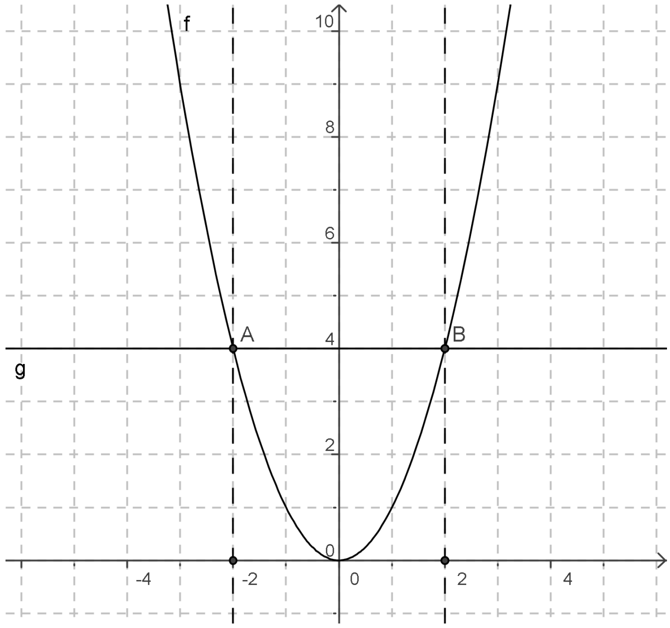
1.3 Application à la résolution graphique d'équations et d'inéquations

Propriété :

Soit k un nombre réel, f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère.

- Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0; k)$ (droite d'équation $y = k$).
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq k$ (respectivement $f(x) \geq k$) sont les abscisses des points de la courbe situés en dessous (respectivement au dessus) de la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0; k)$ (droite d'équation $y = k$).

Exemple :
Sur la figure ci-contre, est représentée la fonction f définie par $f(x) = x^2$.



L'équation $f(x) = 4$ a pour solutions 2 et -2.
L'inéquation $f(x) \leq 4$ a pour ensemble solution $[-2; 2]$.
L'inéquation $f(x) \geq 4$ a pour ensemble solution $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

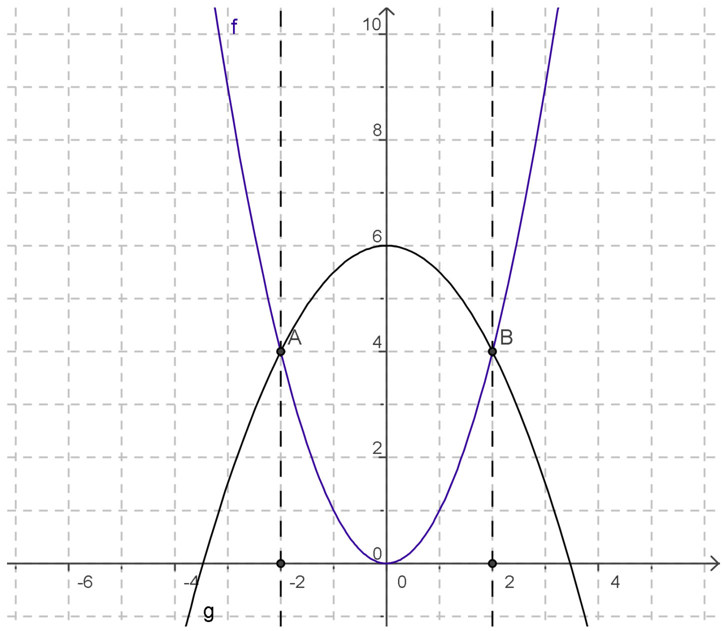
Propriété :

Soient f et g deux fonctions et $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur représentation graphique dans un repère.

- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés en dessous des points de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse.

Exemple :

Les courbes ci-contre sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$.



Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont -2 et 2.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est l'ensemble $]-2; 2[$.

2 Signes des fonctions

2.1 Point de vue algébrique

Définition :

Une fonction f est dite positive (respectivement négative) sur un intervalle I si pour tout réel x de I, $f(x) \geq 0$ (respectivement $f(x) \leq 0$).
Pour résumer le signe d'une fonction, on utilise un tableau de signe.

Exemple d'étude de signe :
On considère le produit

$$(x-3)(1-x)$$

.
On fait apparaître dans un tableau de signes, les signes de $x-3$ et de $1-x$, puis on utilise la règle des signes.
D'une part, $x-3 \leq 0$ pour $x \leq 0$.
D'autre part, $1-x \leq 0$ pour $1 \leq x$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-3$		-		-	0	+	
$1-x$		+	0	-		-	
$(x-3)(1-x)$		-		+		-	

2.2 Point de vue graphique

Propriété :

Toute fonction f est dite positive (respectivement négative) sur un intervalle I si pour tout réel x de I, tout point d'abscisse x de sa représentation graphique est au-dessus (respectivement en dessous) de l'axe des abscisses.

3 Sens de variation des fonctions

3.1 Point de vue algébrique

Définition :

- Toute fonction f est dite croissante sur un intervalle I si pour tous les réels s et b de I avec $a < b$ on a $f(a) \leq f(b)$.
- Toute fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si pour tous les réels s et b de I avec $a < b$ on a $f(a) \geq f(b)$.

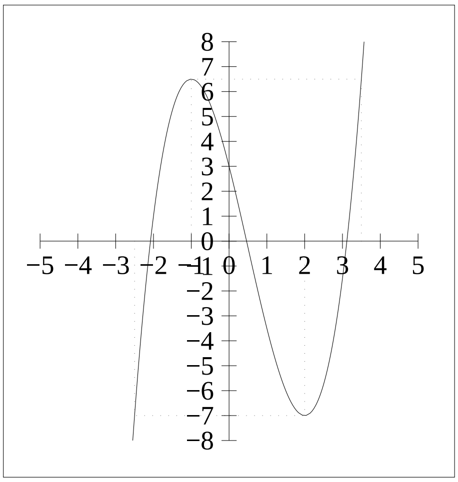
Pour résumer les variations d'une fonction donnée, on utilise un tableau de variation.

3.2 Point de vue graphique

Propriété :

- Toute fonction f est croissante sur un intervalle I si lorsque x augmente dans I alors $f(x)$ augmente.
- Toute fonction f est décroissante sur un intervalle I si lorsque x augmente dans I alors $f(x)$ diminue.

Exemple :
La figure ci-dessous montre représentation graphique d'une fonction f.



Le tableau de variation associé sur l'intervalle $[-2,5;3,5]$ est :

x	-2.5		-1		2		3,5
$f(x)$	-7	$\nearrow$	6,5	$\searrow$	-7	$\nearrow$	6,5