# Variations de suites, cours, première, spécialité Mathématiques

## 1 Sens de variation

**Définition :**

- Une suite $(u_n)_n$ est *croissante* à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \geq p$, ......................... .
- Une suite $(u_n)_n$ est *décroissante* à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \geq p$, ......................... .

**Exemple [Détermination du sens de variation d'une suite définie explicitement] :**

On considère la suite définie pour tout entier naturel $n$ non nul par $u_n = n^2 - 2n - 6$.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on a

....

donc ......

Pour tout $n \geq 1$, .................... donc la suite $(u_n)$ est ........... ............. .

**Propriété :**

Soit $(u_n)$ une suite définie à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$. Si $f$ est une fonction définie sur $[p; +\infty[$ telle que pour tout entier naturel $n$, $u_n = f(n)$, alors

- si $f$ est décroissante sur $[p; +\infty[$, la suite $(u_n)$ est .................. à partir du rang $p$ ;
- si $f$ est croissante sur $[p; +\infty[$, la suite $(u_n)$ est .................. à partir du rang $p$.

**Preuve (cas où $f$ est décroissante par exemple) :**

Pour tout entier naturel $n \geq p$ $u_{n+1} - u_n =$............. .

Or $p \leq n < n+1$ et $f$ est décroissante sur $[p; +\infty[$ donc $u_{n+1}$.......$u_n$ c'est à dire $u_{n+1} - u_n$.....0.

**Exemple [Détermination du sens de variation d'une suite définie explicitement] :**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul $n$.

Alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$.

On sait que $f$ est ............. ................ sur $]0; +\infty[$ donc $(u_n)$ est ............. ....................

**Propriété :**

Soit $(u_n)$ une suite définie à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. Si pour tout entier naturel $n \geq p$, $u_n$ est strictement positif, alors :

- si pour tout entier naturel $n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq$ ....., alors la suite $(u_n)$ est ....................... à partir du rang $p$ ;
- si pour tout entier naturel $n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq$ ....., alors la suite $(u_n)$ est ...................... à partir du rang $p$.

**Preuve :**
Découle immédiatement de l'équivalence $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq$ .... si et seulement si $u_{n+1}$.......$u_n$ c'est à dire $u_{n+1} - u_n \geq$ .....

**Exemple [Détermination du sens de variation d'une suite] :**
Soit $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{5 \times 3^n}{2^{n+2}}$ pour tout entier naturel $n$.
$(u_n)$ est de manière évidente strictement positive.
Pour tout entier naturel $n$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} =$...........
.....
.....
D'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} >$ .... donc la suite $(u_n)$ est .............. ............... .

**Algorithmique :**
Algorithme qui donne, dans le cas d'une suite $(u_n)$ définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, de premier terme $u_p$ et croissante et non majorée, le plus petit rang $n$ tel que la suite soit au-dessus d'un nombre $M$ donné.

```
Données : p, u_p, M
Début traitement
    u ← ....... ;
    tant que u < M faire
        u ← ..... ;
        p ← ....
    fin
    Sorties : p
Fin
```

**Exemple de programmation en langage python :**
Soit $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel $n$ non nul et par $u_1 = 2$. $p$ désigne le premier rang de la suite (1 ici). $M$ est choisi par l'utilisateur.

```python
def seuil(p,u,M):
    u=...
    while(u<M):
        u=.....
        p=.....
    return ....
```

# 2 Application à l'Étude de suites particulières

## 2.1 Suites arithmétiques

**Propriété, reconnaissance :**

Une suite $(u_n)_n$ est arithmétique si et seulement si pour tout entier $n$, ...................... ................... ................. ..................... . Cette constante est alors la ............... de la suite.

**Propriété, sens de variation :**

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de raison $r$.

- Si pour tout entier $n$, $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est à dire $r > 0$ alors $(u_n)_n$ est ........... ..................;
- si pour tout entier $n$, $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est à dire $r < 0$ alors $(u_n)_n$ est .............. ................;
- si $r = 0$ alors $(u_n)$ est ...................... .

## 2.2 Suites géométriques

**Propriété (reconnaissance) :**

Une suite $(u_n)_n$ dont aucun terme n'est nul est géométrique si pour tout entier $n$, ................ .................... ................. ................ . Sa valeur est alors la ............ $q$ de la suite.

**Propriété (sens de variation) :**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_p > 0$ où $p$ est un entier naturel.

- Si ........ alors la suite $(u_n)$ est .............. ................;
- si ........, alors la suite $(u_n)$ est ................ ..............;
- si ........, alors la suite $(u_n)$ est ............... .

**Preuve :**

On a pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = ...$
$u_p$ et $q$ étant positifs, $u_{n+1} - u_n$ est donc du signe de ......... d'où le résultat.