

Variations des suites numériques, cours, première spécialité Mathématiques

F.Gaudon

30 juin 2019

Table des matières

1	Sens de variation	2
2	Application à l'Étude de suites particulières	3
2.1	Suites arithmétiques	3
2.2	Suites géométriques	4

1 Sens de variation

Définition :

- Une suite $(u_n)_n$ est *croissante* à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
- Une suite $(u_n)_n$ est *décroissante* à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$ si pour tout entier $n \geq p$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Exemple [Détermination du sens de variation d'une suite définie explicitement] :

On considère la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = n^2 - 2n - 6$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 2(n+1) - 6 - (n^2 - 2n - 6)$$

$$\text{donc } u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - 6 - n^2 + 2n + 6 = 2n - 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, $2n - 1 > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Propriété :

Soit (u_n) une suite définie à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction définie sur $[p; +\infty[$ telle que pour tout entier naturel n , $u_n = f(n)$, alors

- si f est décroissante sur $[p; +\infty[$, la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p ;
- si f est croissante sur $[p; +\infty[$, la suite (u_n) est croissante à partir du rang p .

Preuve (cas où f est décroissante par exemple) :

Pour tout entier naturel $n \geq p$ $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$.

Or $p \leq n < n+1$ et f est décroissante sur $[p; +\infty[$ donc $u_{n+1} < u_n$ c'est à dire $u_{n+1} - u_n < 0$.

Exemple [Détermination du sens de variation d'une suite définie explicitement] :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul n .

Alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$.

On sait que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc (u_n) est aussi strictement décroissante.

Propriété :

Soit (u_n) une suite définie à partir d'un certain rang $p \in \mathbb{N}$. Si pour tout entier naturel $n \geq p$, u_n est strictement positif, alors :

- si pour tout entier naturel $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p ;
- si pour tout entier naturel $n \geq p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p .

Preuve :

Découle immédiatement de l'équivalence $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ si et seulement si $u_{n+1} \geq u_n$ c'est à dire $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Exemple [Détermination du sens de variation d'une suite] :

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{5 \times 3^n}{2^{n+2}}$ pour tout entier naturel n .

(u_n) est de manière évidente strictement positive.

Pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5 \times 3^{n+1}}{2^{n+3}}}{\frac{5 \times 3^n}{2^{n+2}}} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{2^{n+3}} \times \frac{2^{n+2}}{5 \times 3^n} = \frac{3}{2}$

D'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Algorithmique :

Algorithme qui donne, dans le cas d'une suite (u_n) définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, de premier terme u_p et croissante et non majorée, le plus petit rang n tel que la suite soit au-dessus d'un nombre M donné.

Données : p, u_p, M

Début traitement

$u \leftarrow u_p;$

tant que $u < M$ **faire**

$u \leftarrow f(u);$

$p \leftarrow p + 1$

fin

Sorties : p

Fin

Exemple de programmation en langage python :

Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 2$. p désigne le premier rang de la suite (1 ici). M est choisi par l'utilisateur.

```
def seuil(p, u, M):
    u=2
    while (u<M):
        u=3*u+2
        p=p+1
    return p
```

2 Application à l'Étude de suites particulières

2.1 Suites arithmétiques

Propriété (reconnaissance) :

Une suite $(u_n)_n$ est arithmétique si et seulement si pour tout entier n , la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante est alors la raison de la suite.

Propriété (sens de variation) :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n > 0$ c'est à dire $r > 0$ alors $(u_n)_n$ est croissante ;
- si pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est à dire $r < 0$ alors $(u_n)_n$ est décroissante ;
- si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

2.2 Suites géométriques

Propriété (reconnaissance) :

Une suite $(u_n)_n$ dont aucun terme n'est nul est géométrique si pour tout entier n , le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Sa valeur est alors la raison q de la suite.

Propriété (sens de variation) :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_p > 0$ où p est un entier naturel.

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante

Preuve :

On a pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = u_p q^{n+1-p} - u_p q^{n-p} = u_p q^{n-p}(q - 1)$.
 u_p et q étant positifs, $u_{n+1} - u_n$ est donc du signe de $q - 1$ d'où le résultat.