Suites particulières, classe de première, spécialité mathématique

1 Suites arithmétiques

Définition :
Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_p avec p entier naturel) et pour tout entier naturel n par la relation :

....

D'où le schéma :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_n$$

Exemple :
La suite définie par $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = u_n - 2$ pour tout entier naturel n est arithmétique.
On a :
$u_1 =$ ....,
$u_2 =$ ....,
$u_3 =$ .....

Propriété (expression en fonction de n) :
Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

- si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n,

  ....

- si le premier est u_1, alors pour tout entier n,

  ....

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

....

Exemple [Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique] :
Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 56$.
$u_n =$ ......
On a par exemple, $u_{12} =$ ....
ou encore $u_{15} =$ ....

Propriété :
Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si pour tout entier n, la différence .... est constante. Cette constante est alors .... de la suite.

Exemple [Savoir reconnaître une suite arithmétique] :
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_n = 3n - 6$ et $v_n = 3n^2 - 6$.

....

....

donc (u_n) est arithmétique de raison ..... .

....

....

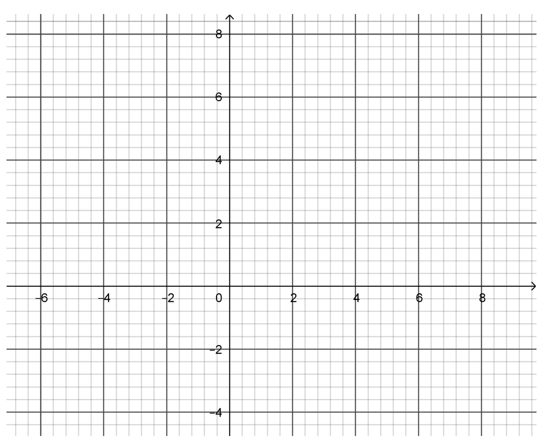
....

donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Propriété :
Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n, $u_n =$.................. si et seulement si sa représentation graphique dans un repère du plan est constituée de points ....
a est alors la raison de la suite.

Preuve :
Il suffit de démontrer l'équivalence entre la première et la deuxième affirmation, la troisième correspondant à la représentation graphique de la troisième.
Si (u_n) est arithmétique de raison a, alors pour tout entier naturel n, $u_n =$.............. d'où la deuxième affirmation en posant ....
Si pour tout entier naturel n, $u_n =$.......... , on pose .... et .... Alors $u_n =$............... et $u_{n+1} - u_n =$..................................... donc la suite est arithmétique de raison ....

Exemple :
La figure ci-dessous montre la représentation graphique de la suite définie par $u_n = -4 + 2n$ pour tout entier naturel n.



2 Suites géométriques

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_p avec p entier naturel) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq p$) :

....

D'où le schéma :

$$u_0 \xmapsto{\times q} u_1 \xmapsto{\times q} u_2 \xmapsto{\times q} \dots \xmapsto{\times q} u_n$$

Exemple :

La suite (v_n) définie par $v_0 = 9$ et $v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel n, est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

On a :

$v_1 =$............. .

$v_2 =$............. .

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme :

- u_0, alors ....
- u_1, alors .....

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

....

Exemple [Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite géométrique] :

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$.

$u_n = \dots$

On a par exemple $u_{12} = \dots.$

Propriété :

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement si pour tout entier n, le quotient .... est constant. Sa valeur est alors la .... de la suite.

Exemple :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,5 \times 3^n$.

On a :

....

....

....

Donc la suite est géométrique de raison ....