Suites numériques particulières, cours, première spécialité Mathématiques

F.Gaudon

24 août 2024

Table des matières

1 Suites arithmétiques

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_p avec p entier naturel) et pour tout entier naturel n (ou $n \geq p$) par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

D'où le schéma :

$$u_0 \xmapsto{+r} u_1 \xmapsto{+r} u_2 \xmapsto{+r} \dots \xmapsto{+r} u_n$$

Exemple :

La suite définie par $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = u_n - 2$ pour tout entier naturel n est arithmétique.
On a :
$u_1 = u_0 - 2 = 11 - 2 = 9$,
$u_2 = u_1 - 2 = 9 - 2 = 7$,
$u_3 = u_2 - 2 = 7 - 2 = 5$.

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

- si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + nr$$

- si le premier terme est u_1, alors pour tout entier n,

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Exemple [Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique] :

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 56$.
$u_n = 56 - 4n$
On a par exemple, $u_{12} = u_0 + 12r = 56 + 12 \times (-4) = 8$ ou encore $u_{15} = u_12 + 3r = 8 + 3 \times (-4) = 8 - 12 = -4$.

Propriété :

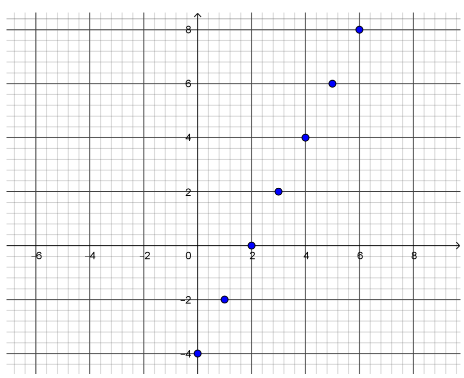
Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante est alors la raison de la suite.

Exemple [Savoir reconnaître une suite arithmétique] :
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_n = 3n - 6$ et $v_n = 3n^2 - 6$.
$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 6 - (3n - 6) = 3n + 3 - 6 - 3n + 6 = 3$
donc (u_n) est arithmétique de raison 3.
$v_{n+1} - v_n = 3(n+1)^2 - 6 - (3n^2 - 6) = 3(n^2 + 2n + 1) - 6 - 3n^2 + 6 = 6n + 3$
$v_1 - v_0 = -3 - (-6) = 3$ et $v_2 - v_1 = 6 - (-3) = 9$
donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Propriété :
Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel n est $u_n = an + b$ si et seulement si sa représentation graphique dans un repère du plan est constituée de points alignés .
a est alors la raison de la suite.

Preuve :
Il suffit de démontrer l'équivalence entre la première et la deuxième affirmation, la troisième correspondant à la représentation graphique de la troisième.
Si (u_n) est arithmétique de raison a, alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + na$ d'où la deuxième affirmation en posant $b = u_0$.
Si pour tout entier naturel n, $u_n = an + b$, on pose $r = a$, $u_0 = b$. Alors $u_n = u_0 + nr$ et $u_{n+1} - u_n = u_0 + (n+1)r - (u_0 + nr) = r$ donc la suite est arithmétique de raison r.

Exemple :
La figure ci-dessous montre la représentation graphique de la suite définie par $u_n = -4 + 2n$ pour tout entier naturel n.



2 Suites géométriques

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_p avec p entier naturel) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq p$) :

$$u_{n+1} = qu_n$$

D'où le schéma :

$$u_0 \overset{\times q}{\longmapsto} u_1 \overset{\times q}{\longmapsto} u_2 \overset{\times q}{\longmapsto} \ldots \overset{\times q}{\longmapsto} u_n$$

Exemple :

La suite (v_n) définie par $v_0 = 9$ et $v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel n, est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

On a :

$v_1 = v_0 \times \frac{1}{3} = 9 \times \frac{1}{3} = 3.$

$v_2 = v_1 \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{3} = 1.$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme :

- u_0, alors $u_n = q^n u_0$;
- u_1, alors $u_n = q^{n-1} u_1$.

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple [Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite géométrique] :

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$.

$u_n = 5 \times 2^n$

On a par exemple $u_{12} = u_0 \times q^{12} = 5 \times 2^{12} = 5 \times 4096 = 20480.$

Propriété :

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement si pour tout entier n, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Sa valeur est alors la raison q de la suite.

Exemple :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,5 \times 3^n$.

On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{0,5 \times 3^{n+1}}{0,5 \times 3^n} = \frac{0,5 \times 3^n \times 3}{0,5 \times 3^n} = 3$$

Donc la suite est géométrique de raison 3.