Sommes de termes de suites, cours, première, spécialité Mathématiques

1 Suites arithmétiques

Propriété :

Pour tout entier naturel n,

$$1+2+3+\ldots+n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ce que l'on note aussi

$$\sum_{k=0}^{k=n} k = \ldots..$$

Preuve :
On a :

$$(1+2+3+\ldots+n)+(1+2+3+\ldots+n)$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

donc $2(1+2+3+\ldots+n) =$.............. d'où le résultat.

Exemple :
$1+2+\ldots+100 = \sum_{k=\ldots}^{k=\ldots}$ .... =...........

Application au calcul des premiers termes d'une suite arithmétique :
Soit (u_n) la suite arithmétiques de raison 3 et de premier terme $u_0 = 10$.
Alors

$$u_0+u_1+u2+\ldots+u_n = \sum_{k=\ldots}^{k=\ldots}(\ldots\ldots\ldots) = = 10+(10+3)+(10+3\times 2)+\ldots+(10+3\times n)$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où $u_{15} =$...................... .

Propriété :

Pour toute suite *arithmétique* $(u_n)_n$ et tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = ...$$

ou, plus généralement, pour tout entier naturel $p < n$,

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k = ...$$

ce qui s'écrit encore :

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = ...$$

Preuve :

Pour $p = 0$ on a :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n$$

$$= ...$$

$$= ...$$

$$= ...$$

$$= ...$$

$$= ...$$

$$= ...$$

$$= ...$$

Le cas $0 < p < n$ se démontre de la même manière.

2 suites géométriques

Propriété :

Pour tout réel $q \neq 1$ on a :

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \sum_{k=0}^{k=n} q^k = ...$$

Preuve :

$(1 - q)(1 + q + q^2 + ... + q^n) =$.............. .

Exemple :

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8 = \sum_{k=...}^{k=...} ...... = ...$

Application au calcul de termes de suites géométriques :

Soit u_n la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + ...u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k &= .... \\ &= .... \\ &= .... \end{aligned}$$

D'où $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_10 =$...............

Propriété :

Si $(u_n)_n$ est une suite *géométrique* de raison q et de premier terme u_0, alors :

- si $q \neq 1$,

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = ...$$

  ou

$$u_p + u_{p+1} + ... + u_n = ...$$

- si $q = 1$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n + 1)u_0$.

Preuve :

On a

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_{n+1}$$
$$= ...$$
$$= ....$$

Or, pour tout réel $q \neq 1$, $(q-1)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n) = ...$

Donc $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_{n+1} =......$

Si $q=1$, $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_{n+1} = u_0(1+1+1^2+1^3+\ldots+1^{n-1}+1^n) = u_0 \times (n+1)$.

3 Cas général

Algorithmique :

Algorithme de calcul de la somme des termes d'une suite jusqu'à un rang n donné, (u_n) étant définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n supérieur ou égal à un entier naturel p donné avec le premier terme u_p donné.

Données : p, n, u_p, f
Début traitement
- $u \leftarrow u_p$;
- $S \leftarrow ....$;
- **pour** k ***allant de*** $p+1$ ***à*** ..... **faire**
  - $u \leftarrow ....$;
  - $S \leftarrow ....$;
- **fin**

Fin

Exemple de programmation en langage python :

Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel n non nul et par $u_1 = 2$ n. p désigne le premier rang de la suite (1 ici), n désigne le dernier rang.

```
def somme(p,n,u):
        S=u
        for k in range(p+1,....):
                u=....
                S=....
        return ....
```

ou

```
def somme(p,n,u):
        S=u
        k=....
        while(k<=n):
                u=....
                S=....
                k=....
        return ....
```