Équations et inéquations du second degré, première, spécialité Mathématiques

1 Equations du second degré

Définition :

- On appelle fonction *polynôme du second degré* toute fonction f qui s'écrit pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.
- Toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée *racine du trinôme* $ax^2 + bx + c$.

Définition :

- On appelle .... toute fonction qui s'écrit pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels fixés avec $a \neq 0$.
- Toute solution de l'équation $ax^2+bx+c = 0$ est appelée .... du trinôme$ax^2 + bx + c$

Propriété et définition :

Pour toute fonction *polynôme du second degré* f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, \quad b, \quad c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on a :

.....

où

$$\alpha = ...$$

et

$$\beta = ...$$

Cette écriture est appelée *forme canonique* de la fonction f.
On appelle *discriminant* du trinôme le réel Δ défini par

....

Preuve :
On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= ... \\ &= ... \\ &= ... \\ &= ... \\ &= ... \end{aligned}$$

Exemple :
2 est une .... de $2x^2 - 5x + 2$ car $2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 0$.
Le discriminant du trinôme $2x^2 - 5x + 2$ est $\delta = ...$

Remarque :
Ordonner les termes du trinôme avant de calculer le discriminant.

Propriété :

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ....
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ....
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ....

Preuve :
On a vu auparavant que $f(x) = a((x - \alpha)^2 + \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.
On a $f(x) = 0$ qui s'écrit encore puisque $a \neq 0$, $(x - \alpha)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$
Donc $(x - \alpha)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.
On reconnaît le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta < 0$, comme le premier membre $(x - \alpha)^2$ est de signe , l'équation .... ;
- si $\Delta = 0$, l'équation s'écrit $(x - \alpha)^2 = 0$ donc $x =$................ .... ;
- si $\Delta > 0$, l'équation donne .... ou ....
  donc .... ou ....
  d'où ....

Exemple [Savoir résoudre une équation du second degré] :

On considère l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

On a vu que $\Delta =$ .....

Il y a donc .... solutions à cette équation :

....

....

Algorithmique :

Algorithme de résolution des équations du second degré c'est à dire de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

```
Données : a, b, c
Début traitement
    Δ ← ........;
    si Δ < 0 alors
        .........................
    fin
    si Δ = 0 alors
        ......................;
        ..........................
    fin
    si Δ > 0 alors
        ..............................;
        .....................................;
        ....................................................
    fin
Fin
```

Exemple de programmation en langage python :

```python
def secondDegre(a,b,c):
        delta =...........
        if delta <0:
                return .....
        if delta==0:
                return .....
        if delta >0:
                return .....
```

Attention : cette implémentation de l'algorithme peut être mise en défaut lors du test de l'égalité en raison de limitation dans le codage des nombres réels dans les langages de programmation. Pour pallier à ce problème, on préfère tester l'égalité à une précision e près (par exemple 0,000001) en utilisant la fonction ci-dessous plutôt que le « == ».

```python
def testeEgalite(x,y,e):
        return math.abs(x-y)<e
```

Propriété :

Avec les mêmes notations que précédemment, la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet comme factorisation de :

- si $\Delta = 0$, ... où x_0 est la racine double du trinôme ;
- si $\Delta > 0$, ... où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes du trinôme.
- si $\Delta < 0$, ... ;

Preuve :

On a vu précédemment que $f(x) = a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$.

- Si $\Delta = 0$, on a donc $f(x) =$.............................. ce qui est bien la factorisation attendue ;
- si $\Delta > 0$, on a $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$ pour tout x réel.
  Or $x_1 + x_2 =$........
  En outre, $x_1x_2 =$.......... donc $x_1x_2 =$....
  D'où $a(x - x_1)(x - x_2) =$................... .... ce qui justifie le deuxième cas.
- Par l'absurde : si $f(x)$ admettait une factorisation dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ s'écrirait $f(x) = (x - r)P(x)$ où P est un polynôme de degré inférieur strictement à 2 et r est un réel. $f(x)$ admettrait donc une racine r réelle ce qui est n'est pas le cas d'après la propriété précédente.

Remarque :

Soit f une fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$ et dont le discriminant Δ est positif. D'après la preuve de la propriété précédente, les deux racines distinctes x_1 et x_2 de f vérifient $x_1 + x_2 =$.......... et $x_1x_2 =$......... .

Exemple [Savoir factoriser une expression du second degré :

On a vu que l'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta =$........ et admet deux solutions .... et ....

On a donc $2x^2 - 5x + 2 =$..........

2 Inéquations du second degré

Propriété :

Avec les mêmes notations que précédemment,

- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de .... ;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de .... ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de ....

Preuve :

- Si $\Delta < 0$, on utilise la forme canonique $f(x) = a((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2})$. On a $(x+\frac{b}{2a})^2$ qui est positif pour tout réel x et $-\frac{b^2-4ac}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a^2}$ qui est strictement positif donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, $f(x)$ a pour expression factorisée .... d'après la propriété précédente donc $f(x)$ est du signe de ....
- Si $\Delta > 0$, $f(x)$ a pour expression factorisée .... On fait un tableau de signe suivant le signe a. Faisons le par exemple pour $a < 0$. On obtient :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		....		....		....	
$x - x_1$		.....	...	....		....	
$x - x_2$		.....		....	...	....	
$f(x)$		....	...	....	...	....	

ce qui justifie la propriété dans le cas où $a < 0$. On procède de même pour le cas $a > 0$.

Exemple [Savoir résoudre une inéquation du second degré] :

Résolution de $\frac{-x^2+6+7}{x+2} \geq 0$.

$x + 2 = 0$ équivaut à .... donc .... est la seule valeur interdite.

Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$:

On a $\Delta =$.................. .

Δ......... donc l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 =$............

et $x_2 =$.............

Étude de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		7		$+\infty$
$x + 2$		....	....	....		....		....	
$-x^2 + 6x + 7$		....		....	....	....	....	....	
$\frac{-x^2+6x+7}{x+2}$		....	....	....	....	....	....	....	

Donc $S =$...............

3 Interprétation graphique

Propriété :

> Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection s'ils existent de la parabole représentant la fonction f et de l'axe des abscisses.

Interprétation :

- Si $\Delta > 0$, la courbe ....;
- si $\Delta = 0$, la courbe ....
- si $\Delta < 0$, la courbe ....

En outre, si $a > 0$, la parabole a ses branches .... et .... si $a < 0$.