Produit scalaire, cours, première spécialité Mathématiques

F.Gaudon

30 juin 2019

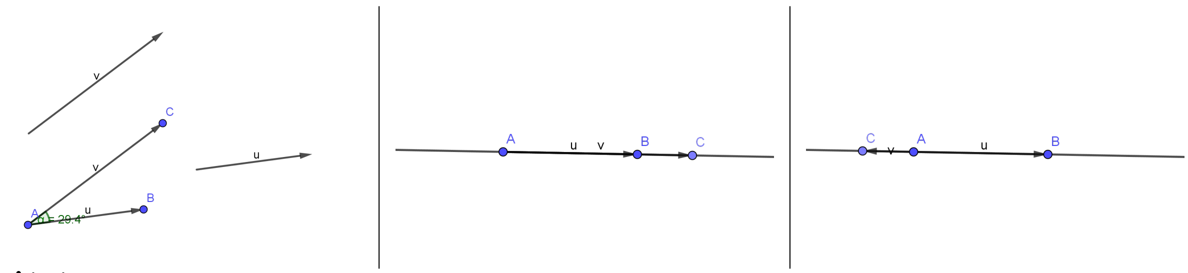
Table des matières

1 Définition et premières propriétés

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. On appelle *produit scalaire* des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

- $$\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$$
  si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls ;
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.



Propriété :

- Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont *colinéaires et de même sens*, alors
  $$\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC$$
  .
- Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont *colinéaires de sens contraire*, alors
  $$\vec{AB}.\vec{AC} = -AB \times AC$$
  .

Preuve :

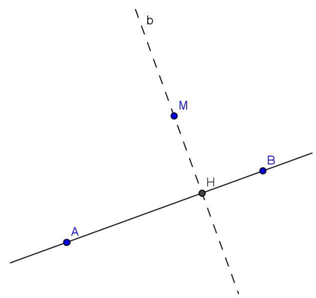
En effet :

- Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires de même sens, alors $\widehat{BAC} = 0°$ d'où $\cos(\widehat{BAC}) = 1$;
- si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires de sens contraire, alors $\widehat{BAC} = 180°$ d'où $\cos(\widehat{BAC}) = -1$.

2 Produit scalaire et projection orthogonale

Définition :

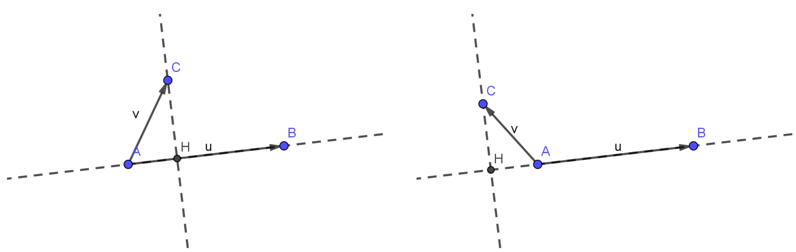
Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite (d) est le point d'intersection de la droite (d) et de la droite perpendiculaire à la droite (d) passant par M.



Propriété, produit scalaire et projection orthogonale d'un vecteur :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA). Alors

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{OA}.\vec{OB} = \vec{OA}.\vec{OH}$$



Preuve :

- Dans le cas où $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de même sens, l'angle $\widehat{BAC}$ est inférieur à 90 ° donc $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\widehat{BAH})$.
  Or dans le triangle HAC rectangle en H, on a $\cos(\widehat{HAC}) = \frac{AH}{AC}$.
  D'ù $\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \frac{AH}{AC} = AB \times AH = \vec{AB}.\vec{AH}$
- Dans le cas où $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont de sens contraire, on a $\widehat{BAC} = 180° - \widehat{HAC}$ d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \cos(180° - \widehat{HAC}) = -\cos(\widehat{HAC})$.
  Or dans le triangle HAC rectangle en H, on a $\cos(\widehat{HAC}) = \frac{HA}{AC}$.
  D'où $\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC}) = AB \times (-\cos(\widehat{HAC})) = -AB \times AC \times \frac{HA}{AC} = -AB \times AH = \vec{AB}.\vec{AH}$.

Exemple [Calcul d'un produit scalaire] :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que $BC = 5$. Alors $\vec{BC}.\vec{BA} = \vec{BC}.\vec{BH}$ où H est le projeté orthogonal de A sur (BC). Comme (AH) est la hauteur issue du sommet principal du triangle ABC isocèle de sommet A, alors H est le milieu de $[BC]$ et $\vec{BC}.\vec{BA} = BC \times BH = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$.

3 Orthogonalité de vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont perpendiculaires.

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Preuve :
Seul le cas où les deux vecteurs sont non nul n'est pas évident. Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si (AB) et (AC) sont perpendiculaires c'est à dire que $\widehat{BAC} = 90°$ c'est à dire si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC\cos(\widehat{BAC}) = 0$.

4 Autres expressions du produit scalaire

4.1 Calcul dans un repère orthonormé

Propriété :

Dans tout repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x'; y')$ alors

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Preuve :
Admise

Exemple [Calculer un produit scalaire] :

Soit $A(-1; 5)$, $B(6; 4)$ et $C(8; -4)$ dans un repère orthonormé.
Calcul de $\vec{AB}.\vec{AC}$:
$\vec{AB}(7; -1)$ et $\vec{AC}(9; -9)$ donc $\vec{AB}.\vec{AC} = 7 \times 9 + (-1) \times (-9) = 63 + 9 = 72$

4.2 Expressions quadratiques

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

ou

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

ou

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\| - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

Preuve :
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On note $(x;y)$ et $(x';y')$ les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement.

- On a $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2$, $\|vecv\|^2 = x'^2+y'^2$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2$.
  D'où $\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}((x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2) = \frac{1}{2}(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2) = \frac{1}{2}(2xx'+2yy') = xx'+yy' = \vec{u}.\vec{v}$;
- De même, $\frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+x'^2+y'^2-((x-x')^2+(y-y')^2)) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+x'^2+y'^2-(x^2-2xx'+y'^2+y^2-2yy'+y'^2) = xx'+2yy' = \vec{u}.\vec{v}$
- Même démarche que précédemment.

Exemple [Calcul d'un produit scalaire] :

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB=4$, $AD=5$ et $AC=7$.
Calcul de $\vec{AB}.\vec{AD}$:
$\vec{AB}.\vec{AD} = \frac{1}{2}(\|\vec{AB}+\vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2))$
Or $\vec{AB}+\vec{AD} = \vec{AC}$ donc
$\vec{AB}.\vec{AD} = \frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2) = \frac{1}{2}(7^2-4^2-5^2) = 4$

5 Propriétés algébriques sur les produits scalaires

Propriété :

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous les nombres réels k, on a :
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$;
- $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

Preuve :
La première égalité est évidente. Dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y)$, $\vec{v}$ a pour coordonnées $(x';y')$ et $\vec{w}$, $(x'';y'')$. Donc $\vec{v}+\vec{w}$ a pour coordonnées $(x'+x'';y'+y'')$ et $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'')+y(y'+y'')$. Par ailleurs, $\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$, $\vec{u}.\vec{w} = xx''+yy''$ donc $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w} = xx'+xx''+yy'+yy''$ ce qui assure la deuxième égalité. On montre de même la troisième égalité.

Propriété et définition :

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^2$ et on a :

$$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

En outre, si O et A sont deux points tels que $\vec{OA} = \vec{u}$, on a :

$$\vec{OA}^2 = \|\vec{OA}\|^2 = OA^2$$

Preuve :
$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \cos(\vec{u};\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$

Propriété, identités remarquables :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$.

Preuve :

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;