Applications du produit scalaire, classe de première, spécialité Mathématiques

1 Vecteurs normaux à une droite et équation cartésienne d'une droite

1.1 Vecteurs normaux à des droites

Définition :

Un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit normal à une droite $(\mathcal{D})$ si ....

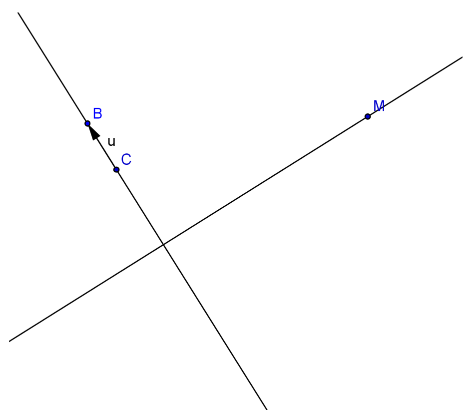
Propriété :

Soient $\mathcal{D}$ une droite, A un point de cette droite et $\vec{n}$ un vecteur normal à cette droite. $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que ....

Preuve :

Si M est un point de $(\mathcal{D})$ distinct de A, alors $\vec{AM}$ a une direction orthogonale à celle de $\vec{n}$ donc .... En outre, si $M = A$, on a évidemment ....

Réciproquement, si M est un point vérifiant ...., alors (AM) est une droite perpendiculaire à la direction de $\vec{n}$ et qui passe par A donc (AM) et $\mathcal{D}$ sont confondues d'où $M \in \mathcal{D}$



1.2 Équation cartésienne de droite

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan.

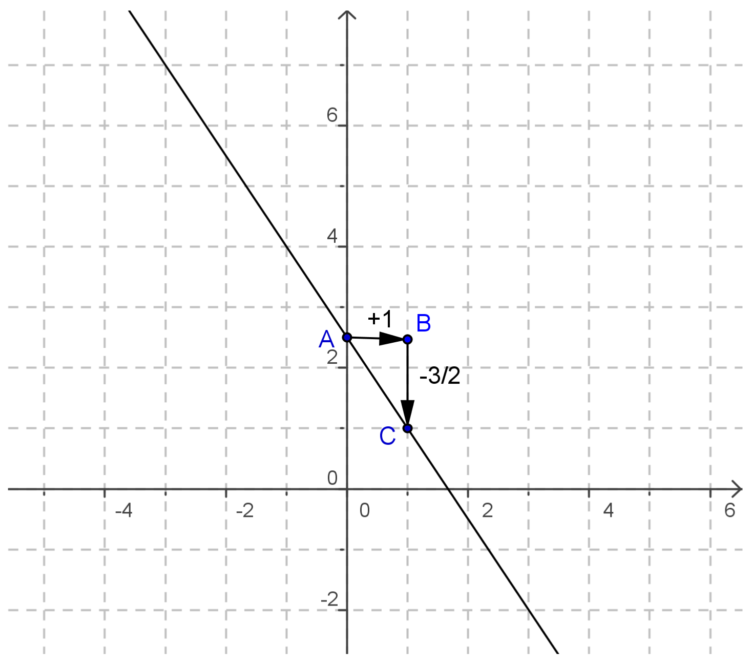
- Toute droite admet une équation de la forme .... où a, b et c sont trois réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$;
- réciproquement, soient a, b et c trois réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que .... avec $(a; b) \neq 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées .... et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées ....

Preuve :

- Soit $\vec{u}$ de coordonnées $(u;v)$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et soit A un point de cette droite de coordonnées $(x_A;y_A)$. Alors $M(x;y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires si et seulement si $v(x-a)-u(y-b)=0$ c'est à dire $vx-uy-va+ub=0$ ce qui est bien une équation de la forme cherchée.
- Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$. Si $b \neq 0$ on l'équation .... s'écrit $y=$......................... . Le point A de coordonnées $(b;-a-\frac{c}{b})$ appartient donc à $\mathcal{D}$. Par suite $M(x;y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est à dire si et seulement si $a(x-b)+b(y+\frac{c}{b}+a)=0$ c'est à dire .... Les points de la droite sont donc bien les points vérifiant l'équation .... Le cas où $b=0$ et alors $a \neq 0$ d'après l'hypothèse $(a;b) \neq (0;0)$ se traite de la même manière.

Exemple :

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x+2y-5=0$. L'équation réduite de la droite est $y=$.................. . Les vecteurs de coordonnées .... et .... sont des vecteurs directeurs de la droite. Le vecteur de coordonnées .... est un vecteur normal à la droite.



Exemple :

Soit $\mathcal{D}$ la droite de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(3;2)$ et passant par A de coordonnées $(-1;4)$. Alors $M(x;y)$ appartient à la droite si et seulement si .... si et seulement si .... si et seulement si .... qui est donc une équation de la droite $\mathcal{D}$.

2 Équation cartésienne de cercle

Propriété :

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(x_I; y_I)$ et de rayon r est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que ....

Preuve :
Traduction en termes de coordonnées de ....

Exemples :

- [Déterminer une équation cartésienne de cercle de centre et de rayon donnés] :
  On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre K(6 ;-5) et de rayon 3 dans un repère orthonormé du plan.
  Alors $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si .... ce qui équivaut à ....
  donc à ....
  donc à ....
- [Reconnaître un cercle à l'aide de son équation cartésienne] :
  On considère dans un repère orthonormé du plan l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 - 2x + 4x = 12$.
  $x^2 + y^2 - 2x + 4x = 12$ équivaut à ....
  c'est à dire à .... après une première utilisation du début du développement de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
  ce qui équivaut encore à .... après une deuxième utilisation de ce début de développement d'identité remarquable.
  Cela équivaut encore à ....
  L'ensemble cherché est donc le cercle de centre le point $K(......; ......)$ et de rayon ....

3 Transformation d'expressions

3.1 Transformation de $\vec{MA}.\vec{MB}$

Propriété :

Soient A et B deux points et I le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point M du plan,

....

Preuve :

$$\begin{aligned}\vec{MA}.\vec{MB} &= ...\\ &= ...\\ &= ...\\ &= ...\end{aligned}$$

car I étant le milieu de [AB], on a $\vec{IB}+\vec{IA}=$ .... et $\vec{IA}=$ ....

D'où $\vec{MA}.\vec{MB}=$.................. .

Comme I est le milieu de [AB], on a aussi $IB=\frac{1}{2}AB$

d'où $\vec{MA}.\vec{MB}=$.....................

Propriété :

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA}.\vec{MB}=0$

Preuve :

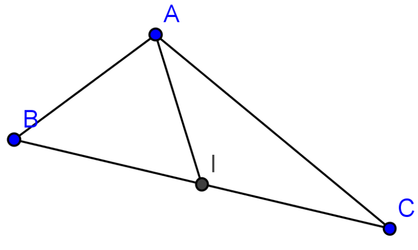
Soit I le milieu de $[AB]$. D'après la propriété précédente, $\vec{MA}.\vec{MB}=0$ équivaut à .... c'est à dire à .... c'est à dire que M appartient au cercle de centre I et de rayon ....

3.2 Transformation de l'expression MA^2+MB^2

Théorème de la médiane :

Soit ABC un triangle. Soit I le milieu de $[BC]$. Alors :

....



Preuve :

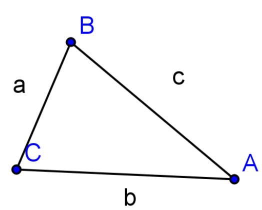
$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots \end{aligned}$$

4 Théorème d'Al Kashi (mathématicien arabe des XIVᵉ-XVᵉsiècle)

Propriété :

Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C} = \widehat{BCA}$. Alors :

....



Preuve :

$a^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2$

$=$

Remarque :

Par permutation des côtés on a aussi :

.....

et

.....