# Applications du produit scalaire, cours, première S

F.Gaudon

28 juin 2019

## Table des matières

# 1 Vecteurs normaux à une droite et équation cartésienne d'une droite

## 1.1 Vecteurs normaux à des droites

**Définition :**

Un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit normal à une droite $(\mathcal{D})$ si sa direction est orthogonale à celle de la droite.

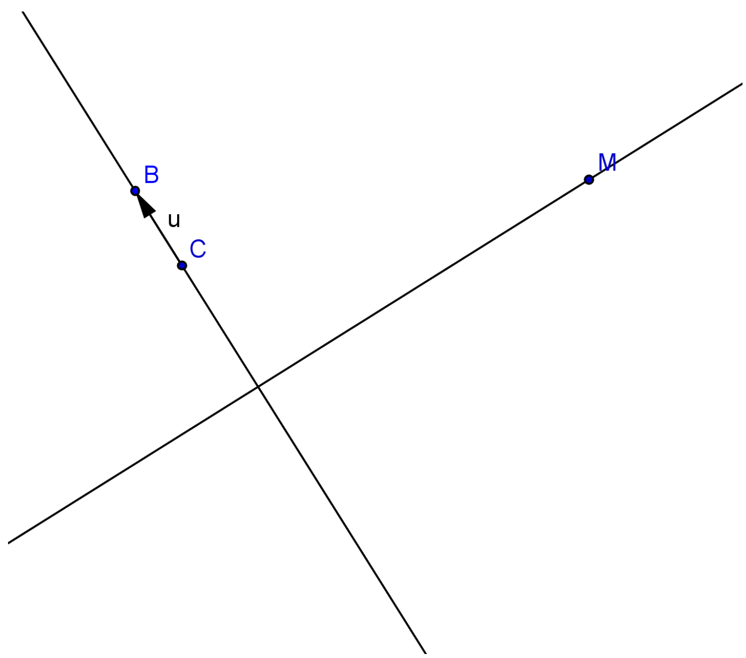
**Propriété :**

Soient $\mathcal{D}$ une droite, $A$ un point de cette droite et $\vec{n}$ un vecteur normal à cette droite. $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\vec{AM}.\vec{n} = 0$.

**Preuve :**

Si $M$ est un point de $(\mathcal{D})$ distinct de $A$, alors $\vec{AM}$ a une direction orthogonale à celle de $\vec{n}$ donc $\vec{n}.\vec{AM} = 0$. En outre, si $M = A$, on a évidemment $\vec{n}.\vec{AM} = 0$.

Réciproquement, si $M$ est un point vérifiant $\vec{n}.\vec{AM} = 0$, alors $(AM)$ est une droite perpendiculaire à la direction de $\vec{n}$ et qui passe par $A$ donc $(AM)$ et $\mathcal{D}$ sont confondues d'où $M \in \mathcal{D}$




## 1.2 Équation cartésienne de droite

**Propriété :**

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

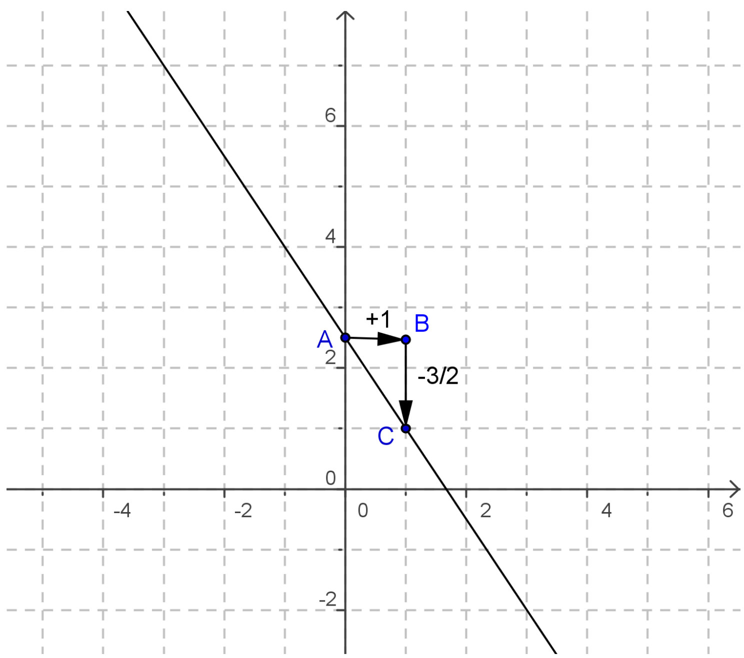
- Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où $a$, $b$ et $c$ sont trois réels avec $(a;b) \neq (0;0)$ ;
- réciproquement, soient $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$, l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c = 0$ avec $(a;b) \neq 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(-b;a)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(a;b)$.

**Preuve :**

- Soit $\vec{u}$ de coordonnées $(u; v)$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ et soit $A$ un point de cette droite de coordonnées $(x_A; y_A)$. Alors $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires si et seulement si $v(x-a) - u(y-b) = 0$ c'est à dire $vx - uy - va + ub = 0$ ce qui est bien une équation de la forme cherchée.
- Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$. Si $b \neq 0$ on l'équation $ax + by + c = 0$ s'écrit $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$. Le point $A$ de coordonnées $(b; -a-\frac{c}{b})$ appartient donc à $\mathcal{D}$. Par suite $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est à dire si et seulement si $a(x-b)+b(y+\frac{c}{b}+a) = 0$ c'est à dire $ax + by + c = 0$. Les points de la droite sont donc bien les points vérifiant l'équation $ax + by + c = 0$. Le cas où $b = 0$ et alors $a \neq 0$ d'après l'hypothèse $(a; b) \neq (0; 0)$ se traite de la même manière.

**Exemple :**

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x+2y-5 = 0$. L'équation réduite de la droite est $y = -\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$. Les vecteurs de coordonnées $(1; -\frac{3}{2})$ et $(-2; 3)$ sont des vecteurs directeurs de la droite. Le vecteur de coordonnées $(3; 2)$ est un vecteur normal à la droite.




**Exemple :**

Soit $\mathcal{D}$ la droite de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(3; 2)$ et passant par $A$ de coordonnées $(-1; 4)$. Alors $M(x; y)$ appartient à la droite si et seulement si $\vec{AM}.\vec{n} = 0$ si et seulement si $3(x+1)+2(y-4) = 0$ si et seulement si $3x + 2y - 5 = 0$ qui est donc une équation de la droite $\mathcal{D}$.

# 2 Équation cartésienne de cercle

**Propriété :**

| |
|---|
| Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(x_I; y_I)$ et de rayon $r$ est l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x; y)$ tels que $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$. |

**Preuve :**
Traduction analytique de $IM^2 = r^2$.

**Exemples :**

- [Déterminer une équation cartésienne de cercle de centre et de rayon donnés] :
  On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre K(6 ;-5) et de rayon 3 dans un repère orthonormé du plan.
  Alors $M(x; y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $KM^2 = 3^2$ ce qui équivaut à $(x-6)^2+(y-(-5))^2 = 9$ donc à $x^2 - 12x + 36 + y^2 + 10x + 25 = 9$ donc à $x^2 - 12x + y^2 + 10x + 52 = 0$.
- [Reconnaître un cercle à l'aide de son équation cartésienne] :
  On considère dans un repère orthonormé du plan l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 - 2x + 4x = 12$.
  $x^2 + y^2 - 2x + 4x = 12$ équivaut à $x^2 - 2x + y^2 + 4x - 12 = 0$
  c'est à dire à $(x - 1)^2 - 1 + y^2 + 4x - 12 = 0$ après une première mise utilisation du début du développement de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
  ce qui équivaut encore à $(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 - 12 = 0$ après une deuxième utilisation de ce début de développement d'identité remarquable.
  Cela équivaut encore à $(x - 1)^2 + (y - (-2))^2 = 17$.
  L'ensemble cherché est donc le cercle de centre le point $K(1; -2)$ et de rayon $\sqrt{17}$.

# 3 Transformation d'expressions

## 3.1 Transformation de $\vec{MA}.\vec{MB}$

**Propriété :**

| |
|---|
| Soient $A$ et $B$ deux points et $I$ le milieu du segment $[AB]$.<br>Pour tout point $M$ du plan,<br>$$\vec{MA}.\vec{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$ |

**Preuve :**

$$\vec{MA}.\vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}).(\vec{MI} + \vec{IB}) \quad = \vec{MI}.\vec{MI} + \vec{MI}.\vec{IB} + \vec{IA}.\vec{MI} + \vec{IA}.\vec{IB} = MI^2 + \vec{MI}.(\vec{IB} + \vec{IA}) + .$$

car I étant le milieu de [AB], on a $\vec{IB} + \vec{IA} = \vec{0}$ et $\vec{IA} = -\vec{IB}$.

D'où $\vec{MA}.\vec{MB} = MI^2 - IB^2$.
Comme I est le milieu de [AB], on a aussi $IB = \frac{1}{2}AB$
d'où $\vec{MA}.\vec{MB} = MI^2 - (\frac{1}{2}AB)^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

**Propriété :**

Le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$

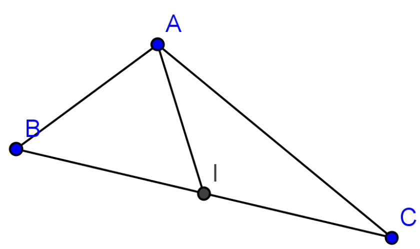
**Preuve :**
Soit $I$ le milieu de $[AB]$. D'après la propriété précédente, $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$ équivaut à $MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = 0$ c'est à dire à $MI^2 = \frac{1}{4}AB^2$ c'est à dire que M appartient au cercle de centre $I$ et de rayon $\frac{1}{4}AB^2$.

## 3.2 Transformation de l'expression $MA^2 + MB^2$

**Théorème de la médiane :**

Soit $ABC$ un triangle. Soit $I$ le milieu de $[BC]$. Alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$



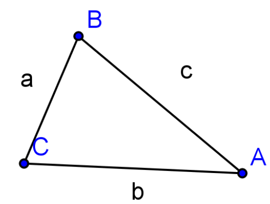

**Preuve :**

$$\begin{aligned}
AB^2 + AC^2 &= (\vec{AI} + \vec{IB})^2 + (\vec{AI} + \vec{IC})^2 \\
&= \vec{AI}^2 + \vec{IB}^2 + 2\vec{AI}.\vec{IB} + \vec{AI}^2 + \vec{IC}^2 + 2\vec{AI}.\vec{IC} \\
&= 2AI^2 + IB^2 + IC^2 + 2\vec{AI}.(\vec{IB} + \vec{IC}) \\
&= 2AI^2 + 2(\frac{1}{2}BC)^2 \\
&= 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2
\end{aligned}$$

# 4 Théorème d'Al Kashi (mathématicien arabe des XIVe-XVesiècle)

**Propriété :**

> Soit $ABC$ un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$, $\widehat{C} = \widehat{BCA}$. Alors :
>
> $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$$




**Preuve :**

$$\begin{aligned} a^2 &= (\vec{BA} + \vec{AC})^2 \\ &= (\vec{AC} - \vec{AB})^2 \\ &= \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - 2\vec{AB}.\vec{AC} \\ &= c^2 + b^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= c^2 + b^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) \end{aligned}$$

**Remarque :**
Par permutation des côtés on a aussi :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$$

et

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$$