Probabilités, variables aléatoires cours, première S

1 Loi de probabilité de variables aléatoires

Définition :
Soit E l'univers associé à une expérience aléatoire, c'est à dire l'ensemble des issues possibles. Toute fonction définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée une *variable aléatoire*.

Définition :
Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire. Notons I l'ensemble des valeurs prises par X, $I = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, et p_i la probabilité de l'événement « X prend la valeur x_i », événement noté $(X = x_i)$. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction définie sur I qui, à chaque valeur x_i, associe le nombre $p(X = x_i)$.

Notation :
On présente souvent la loi de probabilité sous forme de tableau :

valeur de X	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$

Exemple :
On lance un dé. Si les faces 1 et 2 apparaissent on gagne 3 euros. Si les faces 3,4,5 ou 6 sortent, on perd 2 euros.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce jeu. X prend les valeurs 3 et -2. On a $P(X = 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(X = -2) = \frac{4}{6}$.
D'où la loi de probabilité de X :

Valeurs de X	-2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

2 Paramètres d'une variable aléatoire

Définition :

- On appelle *espérance mathématique* de X et on note $E(X)$ le nombre

$$E(X) = x_1p_1 + \ldots + x_np_n$$

- on appelle *variance* de X et on note $V(X)$ le nombre

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2p_1 + \ldots + (x_n - E(X))^2p_n$$

- on appelle *écart type* de X et on note $\sigma(X)$ le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple :

L'espérance de la variable aléatoire de l'exemple précédent est :
$E(X) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} \times 3 = \frac{-4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$
L'espérance mathématique étant négative, on peut considérer le jeu comme en défaveur du joueur.

Propriété :

Soient a et b deux nombres réels et X une variable aléatoire. Alors :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- $V(aX) = a^2V(X)$;

Preuve :

- Remarquons d'abord que la variable aléatoire $aX + b$ prend les valeurs $ax_1 + b$, $ax_2 + b$, ..., $ax_n + b$ avec les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, ..., p_n.
  D'où $E(aX + b) = p_1(ax_1 + b) + p_2(a_x2 + b) + ... + p_n(ax_n + b)$
  $E(aX + b) = p_1ax_1 + p_1b + p_2ax_2 + p_2b + ... + p_nax_n + p_nb$
  $E(aX + b) = a(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n) + b(p_1 + p_2 + ... + p_n)$
  donc $E(aX + b) = aE(X) + b$
- D'après ce qui précède, $E(aX) = aE(X)$. Par ailleurs,
  $V(aX) = p_1(ax_1 - E(aX))^2 + p_2(ax_2 - E(aX))^2 + ... + p_n(ax_n - E(aX))^2$
  $V(aX) = p_1(ax_1 - aE(X))^2 + p_2(ax_2 - aE(X))^2 + ... + p_n(ax_n - aE(X))^2$
  $V(aX) = a^2p_1(x_1 - E(X))^2 + a^2p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(ax_n - aE(X))^2$
  $V(aX) = a^2(p_1(x_2 - E - X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2$
  $V(aX) = a^2V(X)$