Probabilités conditionnelles, cours, première spécialité Mathématiques

1 Rappels sur les intersections et les réunions

Définition :

Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire "A .... B") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A .... B.
- Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B, c'est à dire $A \cap B =$ ...., on dit que A et B sont .... ou ....
- L'événement $A \cup B$ (lire "A .... B") est l'ensemble des issues qui réalisent A .... B, c'est à dire .... des deux événements.
- L'événement $\bar{A}$ appelé événement .... ou .... de A est l'ensemble des issues qui ....

Propriété :

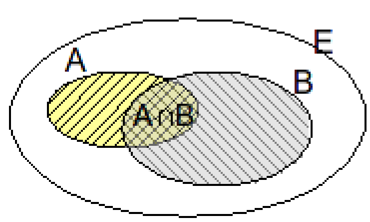
Soit P une loi de probabilité sur un ensemble E.

- Pour tous les événements A et B, on a :

....

- En particulier, si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout événement A,

....



2 Notion de probabilité conditionnelle

Définition :

Pour tout événement A non impossible et tout événement B, on appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* et notée $P_A(B)$ le nombre

....

Exemple :

Lors d'un sondage, 50% personnes des interrogées déclarent pratiquer un sport régulièrement et 75% des personnes interrogées déclarent aller au cinéma régulièrement. De plus, 40% des personnes déclarent faire du sport et aller au cinéma régulièrement. On interroge à nouveau une de ces personnes au hasard et on considère les événements « la personne interrogée pratique un sport régulièrement » et « la personne interrogée va au cinéma régulièrement » que l'on notent S et C respectivement. On cherche à calculer la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma.

On a $P(C) = 0,75$ et $P(S \cap C) = 0,4$. Donc $P_C(S) =$................ ....

Propriété :

Soient A et B deux événements non impossibles d'un univers donné. La connaissance de la probabilité d'un événement B et de la probabilité conditionnelle d'un événements A sachant B permet de retrouver la probabilité $P(A \cap B)$ de l'intersection de A et B avec la formule

....

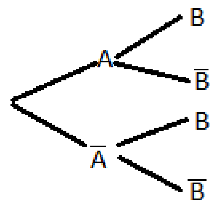
.

Propriétés :

Pour tous les événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(A) =$ ...... ;
- $P_A(\bar{B}) =$ .... ;
- Si A et B sont des événements incompatibles (c'est à dire ne pouvant pas se réaliser simultanément ou encore tels que $A \cap B =$ ....) alors $P_A(B) =$ ......

3 Arbre pondérés



Définition :

Le schéma ci-dessus est appelé *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités*. Il comporte 4 *chemins* : ...., ..., ... et .... Un *noeud* est un point d'où partent ....

Propriété :

Dans un *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités* comme ci-dessus,

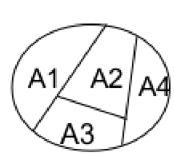
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 (par exemple, $P_A(B) + P_A(\bar{B}) =$ ....) ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches (par exemple, $P(A \cap B) =$ ....) ;

4 Partitions et formule des probabilités totale

Définition :

Soient A_1, A_2, ..., A_n pour $n \geq 1$ des parties non vides d'un ensemble E. On dit que A_1, A_2, ..., A_n forment *une partition* de E si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n =$ .... ;
- pout tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et tout $j \in \{1; 2; ...; n\}$ avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j =$ ....



Formule des probabilités totale :

Si A_1, A_2, ..., A_n forment une partition d'un univers E, alors pour tout événement B de l'univers E :

....

ou encore

....

En particulier, pour tout événement A,

....

Remarque :
Sur l'arbre pondéré du paragraphe précédent, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le compose (par exemple, $P(B) =$ ....).

5 Indépendance d'événements

Définition :

On dit que deux événements A et B sont *indépendants* lorsque

....

Remarque :
Si $P(A) \neq 0$ alors deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) =$ .... si et seulement si $P_B(A) =$ .... avec $P(B) \neq 0$, ce qui signifie que la probabilité que l'un des deux événements se réalise ne dépend pas de la probabilité que l'autre se réalise.

Exemple :
On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On appelle A l'événement « on tire un as », T l'événement « on tire un trèfle » et N l'événement « on tire une carte noire ». On a $P(A) =$ ...., $P(T) =$ .... et $P(N) =$ ....

D'une part $A \cap T$ est l'événement « on tire l'as de trèfle » et $P(A)P(T) =$............ .... qui est bien égal à .... ce qui montre que A et T sont indépendants.

D'autre part, $T \cap N$ est l'événement « on tire un trèfle et une carte noire » dont la probabilité est .... mais on a $P(T)P(N) =$............... .... $\neq P(T \cap N)$ ce qui confirme que les événements T et N ne sont évidemment pas indépendants.

Propriété ⊙ :

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

Preuve :
Si A et B sont indépendants dans un univers E alors $P(A \cap B) =$ .... $\bar{A}$ et B sont indépendants si et seulement si $P(\bar{A} \cap B) =$...................... . Or $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) =$ ..... d'après la formule des probabilités totales. D'où $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) =$..................... par indépendance de A et B. Donc $P(\bar{A} \cap B) = (1 - P(\bar{A}))P(B) =$................... . D'où l'indépendance de $\bar{A}$ et B.

6 Succession d'épreuves indépendantes

Définition :

Lorsque l'on tire au hasard et successivement des objets dans un ensemble, on dit que les tirages sont *avec remise* si chaque objet est remis dans l'ensemble avant le tirage suivant. Les épreuves qui constituent une expérience aléatoire sont alors dites identiques et indépendantes.

propriété :

La probabilité d'un événement constitué de tirages indépendants est le produit des probabilités de chacun des résultats.